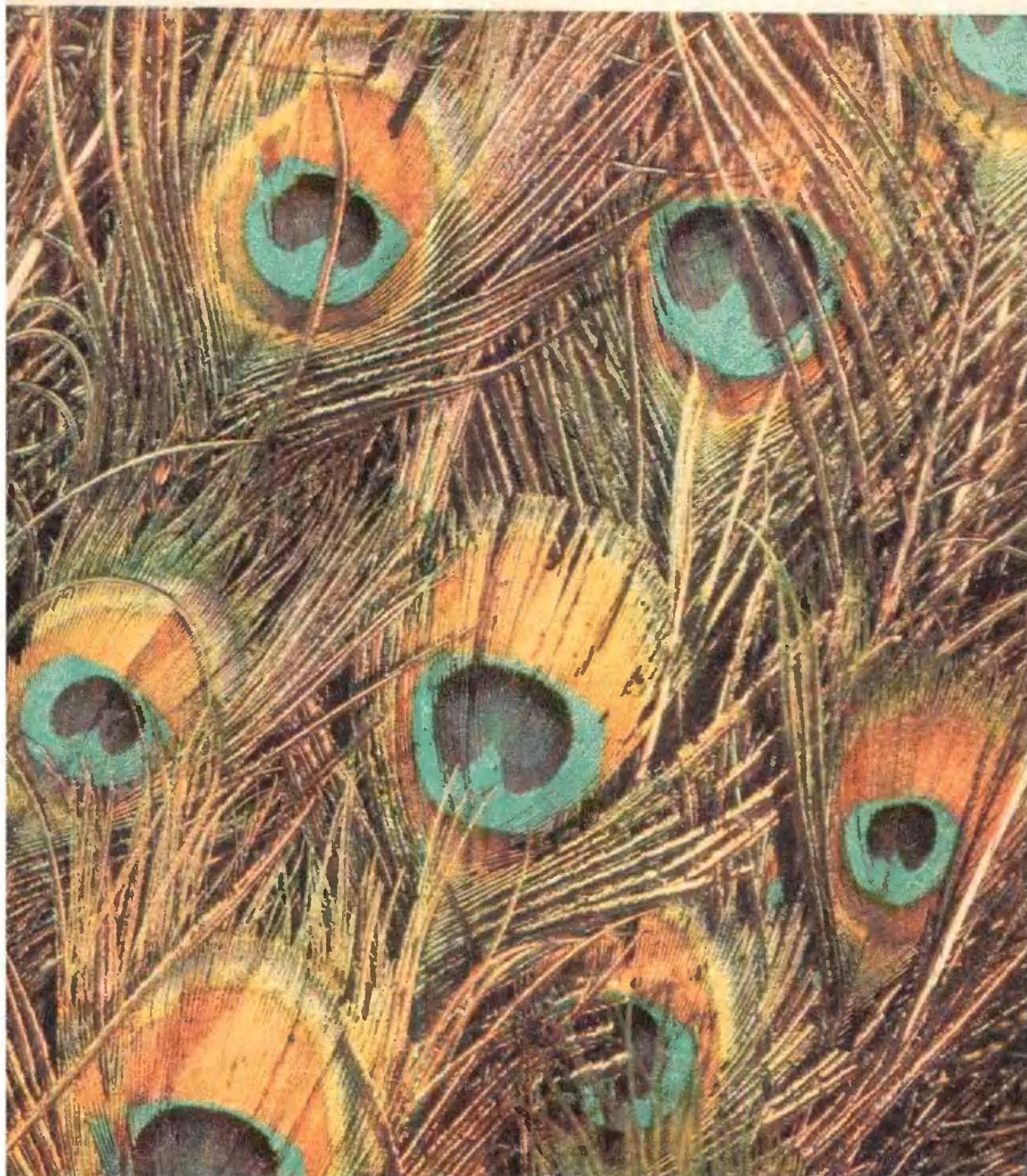


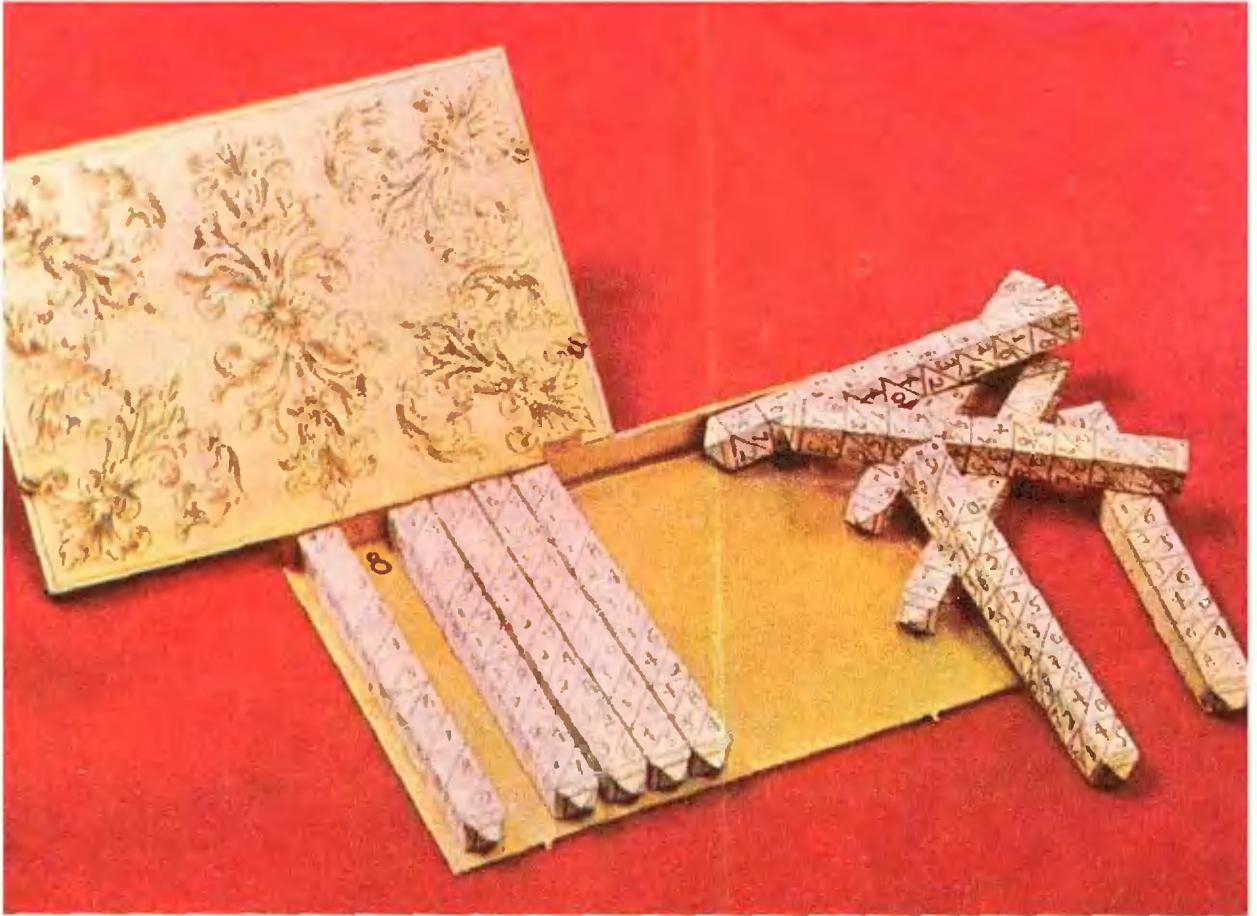
Квант

1975

2

*Научно-популярный
физико-математический
журнал*





На верхней фотографии изображены «костяные дощечки Непера» в медной коробочке, изготовленные в 1617 году — в том самом году, когда они были изобретены. Это своеобразное вычислительное устройство, принцип действия которого использует очевидные свойства Пифагоровой Таблицы умножения, представляя ее в «разъемном варианте». С помощью изобретения Джона Непера, перекладывая «дощечки», можно выполнить умножение, деление целых чисел и даже извлекать квадратные корни. Умножение производится особенно просто и

практически, благодаря «дощечкам», заменяется сложением. Поэтому современниками высоко оценены «костяные дощечки». На недостатки прибора, в том числе, на то обстоятельство, что составные части его легко рассмотреть, обладатели прибора обратили внимание позже.

Настоящий прибор входит в коллекцию Парижского музея Прикладных искусств. О том, как пользоваться вычислительным устройством Непера, рассказывается в «Кванте» № 2, с. 42.

Квант

Основан в 1970 году.

1975
2

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Калица,
В. А. Кириллин.

главный художник

А. И. Климанов,
С. М. Козел.

зам. главного редактора

В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий.

зам. главного редактора

М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбург,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова.

художественный редактор

Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова.

зам. редакцией

Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

- 2 А. В. Елецкий. Скорость света и ее измерение
10 А. Б. Хацет. Транспортные сети и электрические цепи
18 В. Н. Арабаджи. Дифракционная окраска насекомых

Математический кружок

- 20 Э. Г. Готман. Прямая Эйлера

Задачник «Кванта»

- 26 Задачи М306—М310; Ф318—Ф322
28 Решение задач М268—М272; Ф278—Ф284

Практикум абитуриента

- 43 Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. Когда помогают графики
49 В. Е. Белонучкин, В. И. Чехлов. Московский физико-технический институт

Рецензии, библиография

- 52 Н. В. Метельский. Математики о математике
52 К. И. Кугель. Как это измерить?
55 Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский. Новые книги

Информация

- 57 И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин. Пятая математическая олимпиада МЭСИ

«Квант» для младших школьников

- 58 Задачи
59 М. П. Барболин. Головоломки и графы

- 61 Ответы, указания, решения
Смесь (с. 17, 25, 42, 56)

На первой странице обложки вы видите фотографию части хвоста павлина. Яркие глазки хвостового пера могут менять свой цвет. Это объясняется тем, что окраска павлина вызвана дифракцией. О дифракционной окраске птиц и насекомых рассказывается в статье В. Н. Арабаджи, опубликованной в этом номере журнала на с. 18

С Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год.

СКОРОСТЬ СВЕТА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

А. В. Елецкий

Многие законы современной физики содержат в качестве параметра скорость света c . Эта величина входит в уравнения электромагнитного поля, через нее выражается полная энергия вещества, уровни энергии электронов в атоме и т. д. Наряду с другими постоянными величинами, такими, например, как заряд электрона и гравитационная постоянная, скорость света относится к фундаментальным физическим постоянным. Ясно, что точность физических законов определяется той точностью, с которой известны значения соответствующих постоянных, единственным способом определения которых является эксперимент.



Принцип измерения скорости света. Традиционный метод измерения скорости света, идея которого впервые была высказана еще Галилеем, основан на измерении времени, за которое световой сигнал проходит определенное расстояние. Развитие этого метода — от астрономических наблюдений Рёмера до филигранных интерферометрических измерений Майкельсона — было подробно описано в нашем журнале*). Согласно измерениям такого рода значение скорости света было принято равным $299\,792,6 \pm 0,25$ км/с. Отметим, что наибольшая относительная точность, достигнутая при измерении скорости света с помощью такого метода, получена в 50-х годах нашего столетия и составляет около одной десятичной доли процента, или 10^{-6} .

Напомним, что любое измерение можно характеризовать относительной и абсолютной ошибками. Абсолютная ошибка — это возможное отклонение результата измерения от точного значения измеряемой величины. Такое отклонение может быть связано с несовершенством измерительного прибора или процесса измерения и всегда должно оцениваться заранее. Относительная ошибка измерения — отношение абсолютной ошибки к самой измеряемой величине. Хотя заранее очевидно, что при точных измерениях нужно стараться уменьшать как абсолютную, так и относительную ошибку, в большинстве случаев наиболее важной характеристикой точности измерения является относительная ошибка. В самом деле, измерение, скажем, расстояния от Земли до Луны с абсолютной ошибкой ± 1 м — весьма точное измерение, а измерение с той же абсолютной ошибкой размера комнаты — всего лишь грубая оценка. Это стало бы ясно сразу, если бы мы указали, что в первом случае относительная ошибка составляла величину 10^{-8} , а во втором случае — 10^{-1} .

Дальнейшее повышение точности измерения скорости света интерференционными методами наталкивалось на принципиальные трудности. Расстояние, которое мы можем измерить с высокой точностью (это расстояние соизмеримо с эталоном длины —

*) См. статью В. Винецкого «Измерение скорости света», «Квант», 1972, № 2.

метром), свет проходит за чрезвычайно малые промежутки времени, порядка 10^{-8} с. При измерении таких промежутков времени возникает значительная ошибка. С другой стороны, время прохождения светом больших расстояний (скажем, свыше 10 км) может быть зафиксировано достаточно точно, однако при измерении самого расстояния с помощью эталона длины накапливается значительная ошибка. В таком случае для измерения больших расстояний пользуются как раз оптическим методом, но для его использования необходимо заранее знать величину скорости света. Получается замкнутый круг.

Разрешить это противоречие удалось в последние годы, когда стало практически возможным использование другого принципа измерения скорости света, основанного на том, что длина волны λ и частота ν электромагнитных волн в вакууме связаны между собой фундаментальным соотношением

$$c = \lambda \nu. \quad (1)$$

Измерив независимо друг от друга длину волны и частоту одного и того же электромагнитного излучения, мы могли бы простым умножением этих величин получить значение скорости света. Точность такого эксперимента будет весьма высокой, если мы сможем удовлетворить одновременно двум требованиям.

Во-первых, мы должны уметь измерять длину волны и частоту электромагнитных колебаний с высокой степенью точности.

Во-вторых, частота колебаний электромагнитного излучения, с которым мы собираемся экспериментировать, должна поддерживаться возможно более постоянной.

Из соотношения (1) следует, что для электромагнитной волны относительные степени непостоянства частоты и длины волны совпадают.

В самом деле, пусть частота электромагнитной волны ν изменилась на малую величину $\delta\nu \ll \nu$. Это повлечет за собой изменение длины волны на величину $\delta\lambda$, так что произ-

ведение нового значения частоты $\nu + \delta\nu$ на новое значение длины волны $\lambda + \delta\lambda$ должно по-прежнему равняться скорости света c . Решая уравнение (1), написанное для этого случая, относительно $\delta\lambda$ получим

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \frac{c}{\nu + \delta\nu} - \lambda = \frac{c}{\nu + \delta\nu} - \frac{c}{\nu} = \\ &= -\frac{c\delta\nu}{\nu(\nu + \delta\nu)} = -\lambda \frac{\delta\nu}{\nu + \delta\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\delta\nu}{\nu + \delta\nu} \approx -\frac{\delta\nu}{\nu},$$

поскольку $\delta\nu \ll \nu$. Таким образом, относительные неточности в значениях частоты и длины волны противоположны по знаку и равны по величине.

Итак, если мы имеем источник электромагнитных колебаний постоянной частоты, то длина волны таких колебаний будет в той же степени постоянна. Это есть частный случай общего утверждения, что если две физические величины обратно пропорциональны друг другу, то их относительные неточности равны, если только коэффициент пропорциональности (в нашем случае — c) считать точно известным.

Создание электромагнитных колебаний, длина волны и частота которых остаются постоянными с высокой степенью точности в течение длительного времени, стало возможным в последние годы благодаря появлению лазеров — источников мощного монохроматического излучения. Однако, хотя частота и длина волны лазерного излучения постоянны с высокой точностью, их совместное измерение наталкивается на значительные технические трудности. Рассмотрим это подробнее.

Эталон для измерения длины

Всякое измерение сводится в конце концов к сравнению с некоторым эталоном. Существуют эталоны для измерения самых разнообразных параметров физических объектов и процессов: например, эталоны длины, времени, силы тока, массы вещества и т. д. Эталоны стараются выбирать

таким образом, чтобы их значения не зависели от внешних факторов, таких как температура и давление воздуха, высота над уровнем моря и т. п.

В частности, современный эталон длины связан с длиной волны электромагнитного излучения, возникающего при переходе электрона в атоме криптона из одного возбужденного состояния в другое.

Электроны в любом атоме могут находиться в различных состояниях, отличающихся друг от друга энергией. Если для определенного атома известен полный набор таких состояний, то говорят, что известен спектр атома. Для физика атомы различных химических элементов отличаются друг от друга, главным образом, своими спектрами, так что спектры служат «портретами» атомов. Из состояния с большей энергией E_2 электроны могут самопроизвольно (спонтанно) переходить в состояние с меньшей энергией E_1 . При этом энергия $E_2 - E_1$ выделяется в виде кванта электромагнитных колебаний. Частота ν этих колебаний связана с выделяющейся энергией соотношением

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}, \quad (2)$$

где h — постоянная Планка.

Поскольку энергия состояний, в которых могут находиться электроны в атомах, крайне слабо подвержена воздействию внешних условий, частота излучаемых атомами колебаний оказывается постоянной с высокой степенью точности. А так как степени постоянства частоты и длины волны электромагнитных колебаний совпадают, длина волны излучаемого света оказывается также строго постоянной. Поэтому такой свет удобно использовать в качестве весьма точной «линейки» для измерения длины.

По определению международный эталон длины — метр — содержит 1 650 763, 73 длин волн излучения, возникающего при переходе между двумя определенными состояниями атома криптона. Это излучение испускается газоразрядной лампой, заполненной криптоном при строго определенном давлении и работающей при строго определенном токе и напряжении питания. Крип-

тоновая лампа выбрана потому, что она относительно проста в изготовлении и имеет большой срок службы.

Измерение длины волны лазера

Измерение длины с помощью криптонового эталона основано на явлении интерференции света.

В каждой точке пространства, где распространяется световая волна, возникает электромагнитное поле, причем величины векторов напряженности электрического поля и индукции магнитного поля изменяются по гармоническому закону. Когда через некоторую точку пространства в одном направлении проходят два когерентных световых луча, то суммарный эффект будет зависеть от того, в каких фазах происходят колебания векторов напряженности электрического (или индукции магнитного) поля обоих лучей в этой точке. Если фазы колебаний совпадают, то есть векторы напряженностей направлены одинаково, то интенсивность света в этой точке максимальна. Если же, наоборот, фазы колебаний противоположны, то есть векторы напряженностей направлены противоположно друг другу, интенсивность света в точке минимальна. Таким образом, если два луча света одинаковой частоты с постоянной разностью фаз (то есть с постоянным соотношением между векторами напряженности электрического поля или индукции магнитного поля) направить на экран, то мы увидим на экране чередующиеся светлые и темные полосы — так называемую интерференционную картину.

Одна из возможных схем для измерения длины предмета, в которой используется интерферометр Майкельсона, показана на рисунке 1. Световая волна от источника 1 разделяется в полупрозрачной пластинке 2 на две волны. Одна волна отражается от нижней поверхности пластинки и идет вверх, отражается от неподвижного зеркала 3, проходит

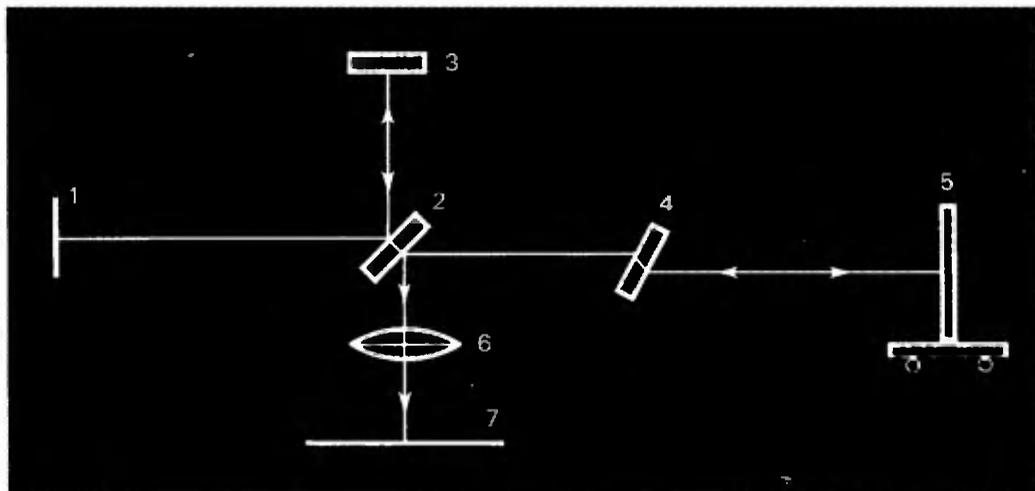


Рис. 1.

пластинку 2 и линзу 6, попадает на экран 7, расположенный в фокальной плоскости линзы. Вторая волна, пройдя пластинки 2 и 4, отражается от зеркала 5, укрепленного на тележке, возвращается к пластинке 2, отражается от ее нижней поверхности и идет к экрану. Пластинка 4 нужна для того, чтобы уравнять оптические пути обеих волн. Действительно, первая волна три раза проходит пластинку 2, а вторая волна — только один раз.

В результате интерференции двух лучей на экране возникает интерференционная картина, представляющая собой чередование темных и светлых полос. При передвижении тележки с зеркалом вдоль предмета, длину которого нужно измерить, интерференционная картина также бу-

дет как бы перемещаться по экрану. Например, при передвижении тележки на расстояние, равное половине длины волны света, используемого в опыте, все темные полосы на экране станут светлыми и наоборот (рис. 2). Поэтому каждая точка экрана по мере перемещения тележки будет попеременно темной или светлой, то есть будут возникать «вспышки» одна за одной. Причем число «вспышек» равно числу волн, которые укладываются на длине измеряемого предмета. Подсчет числа «вспышек» удобно производить в центральной точке интерференционной картины. Величина освещенности в центре интерференционной картины фиксируется фотоприемником, который соединен со счетчиком импульсов. Таким образом, процесс измерения мож-

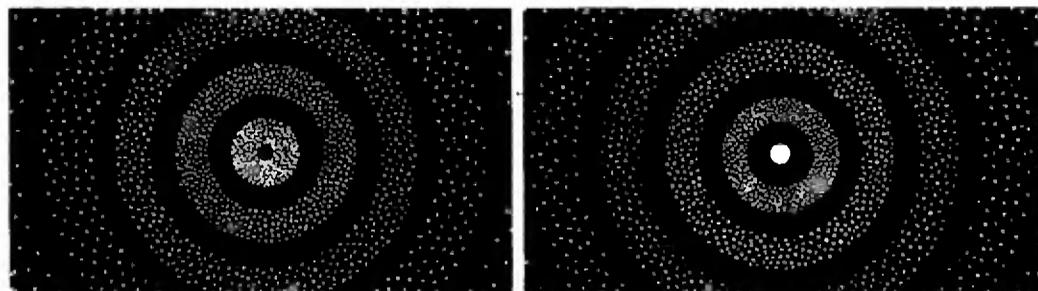


Рис. 2

но автоматизировать. Высокая чувствительность фотоприемника позволяет измерять длину объекта с точностью до одной сотой длины волны оптического излучения, что составляет около 10^{-8} м. То есть предметы длиной около метра можно измерять с относительной ошибкой порядка 10^{-8} .

Длину волны лазерного луча легко определить, измерив длину одного и того же предмета сначала с помощью криптонового эталона, а затем с помощью лазера и посчитав, во сколько раз отличается число «вспышек» в первом и во втором случаях.

Мы подробно рассмотрели, как измеряют длину волны лазерного излучения. Благодаря тому, что эталон длины — метр — основан на длине волны излучения атомов криптона в видимой области спектра, точность такого измерения примерно соответствует точности самого эталона длины, то есть равна 10^{-8} . Это наиболее высокая точность, какой можно достичь в настоящее время. Повысить эту точность можно будет только после введения нового, более точного эталона длины.

Цезиевый эталон частоты

Гораздо сложнее дело обстоит с измерением частоты лазерного излучения.

В качестве эталона частоты используется излучение цезиевого мазера — квантового генератора электромагнитного излучения с длиной волны, лежащей в области радиоволн. Принцип работы цезиевого мазера состоит в следующем. Атом цезия обладает магнитным моментом, то есть представляет собой мельчайший магнитик. При обычных условиях существует два сорта атомов цезия, отличающихся друг от друга величиной магнитного момента. Другими словами, магнитное поле, создаваемое атомом одного сорта, несколько больше, чем поле, создаваемое атомом другого сорта. Если такие атомы поме-

стить в магнитное поле (например, между полюсами магнита), то сила взаимодействия магнитных моментов атомов с полем будет зависеть, во-первых, от величины внешнего магнитного поля, а во-вторых, от того, какой величиной магнитного момента обладает данный атом. Чем больше сила, тем больше и потенциальная энергия атомов цезия. Таким образом, в магнитном поле два сорта атомов цезия будут отличаться энергиями. Обозначим эти энергии, зависящие от величины внешнего магнитного поля, через E_1 и E_2 ($E_1 < E_2$).

Подвергнем пары цезия действию электромагнитного излучения, энергия квантов которого $h\nu$ равна разности энергий $E_2 - E_1$:

$$h\nu = E_2 - E_1.$$

Тогда атомы первого сорта, энергия которых равна E_1 , поглотив такой квант, увеличат свою энергию до значения E_2 , то есть превратятся в атомы другого сорта. Поскольку разность энергий атомов цезия при определенном значении магнитного поля весьма слабо подвержена воздействию внешних условий, такое излучение можно использовать в качестве эталона частоты. Но для этого надо уметь отделять атомы одного сорта от атомов другого сорта. Такая сортировка возможна с помощью магнитного поля. Если пучок атомов обоих сортов пропускать через неоднородное магнитное поле, то траектории атомов разного сорта будут различными, так как различны энергии взаимодействия магнитного момента атома с полем. Отсортированный таким образом пучок атомов цезия подвергается воздействию электромагнитного поля. Если частота колебаний поля соответствует разности энергий $E_2 - E_1$, то атомы переходят в другое состояние, так что их траектория в неоднородном магнитном поле изменяется.

Значение частоты электромагнитных колебаний, при которой происходит такой переход, может быть зарегистрировано с относительной пог-

решностью порядка 10^{-12} . Это значение, определенное при строго фиксированной величине внешнего магнитного поля, равно 9 192 631 770,0 герц и является, по соглашению, международным эталоном частоты.

Возникает вопрос: а как пользоваться таким эталоном частоты? Как, например, проверить по нему точность хода наших часов? Ведь маятник часового механизма делает 1—10 колебаний в секунду, а сигнал цезиевого эталона представляет собой электромагнитную волну, интенсивность которой изменяется за секунду примерно 10^{16} раз. Как с помощью цезиевого эталона частоты можно измерить частоту лазера, излучение которого происходит с частотой порядка 10^{15} гц?

Ясно, что прямое сравнение столь различных по масштабу частот является задачей такой же безнадежно трудной, как, например, точное измерение расстояния от Земли до Луны с помощью метровой линейки. Точное измерение возможно только при сравнении близких по масштабу величин. Поэтому для измерения с помощью цезиевого эталона частот различных колебаний необходимо прежде всего приблизить измеряемую частоту к частоте эталона. В настоящее время эта задача решается использованием техники нелинейного преобразования частоты электромагнитного излучения.

Нелинейная система

Преобразование частоты путем многократного ее умножения происходит, например, при воздействии синусоидального колебания некоторой частоты ν на нелинейный элемент. Для того чтобы понять, что такое нелинейный элемент, вспомним закон Ома, связывающий напряжение U , приложенное к проводнику с сопротивлением R , и ток I , протекающий через этот проводник: $U=IR$. Если величина R не зависит ни от тока, ни от напряжения, говорят, что про-

водник является линейным элементом. И наоборот, сопротивление нелинейных элементов зависит либо от приложенного напряжения, либо от протекающего через них тока. Например, обычные сопротивления представляют собой линейные элементы, а полупроводниковый диод — нелинейный элемент.

Важнейшей характеристикой любой системы, как линейной, так и нелинейной, является связь между сигналом, подаваемым на вход такой системы, и сигналом, возникающим на ее выходе. Для линейных систем возможно только изменение амплитуды сигнала при неизменной зависимости величины сигнала от времени. Зная коэффициент пропорциональности между амплитудами сигналов и характер входного сигнала, мы однозначно определим выходной сигнал (в случае линейных сопротивлений, подчиняющихся закону Ома, таким коэффициентом служит величина сопротивления R). Поскольку свойства нелинейных систем сами зависят от подаваемого на их вход сигнала, форма выходного сигнала уже не будет повторять в точности форму сигнала, подаваемого на вход. Для того чтобы охарактеризовать нелинейную систему полностью, недостаточно задать коэффициент пропорциональности, связывающий величины входного и выходного сигналов. Необходимо еще знать зависимость этого коэффициента от величины входного сигнала.

Например, если растягивать кусок упругого материала, то увеличение его длины l будет связано с приложенным усилием F законом Гука: $F = kl$. При малых значениях F зависимость линейная, то есть коэффициент k от F не зависит, и рассматриваемый образец является линейной системой. При увеличении приложенной силы линейность нарушается. Оказывается, при больших значениях F все материалы становятся нелинейными, то есть становится существенной зависимость k (F).

Среди нелинейных элементов большое место занимают нелинейные колебательные системы. Типичным примером колебательной системы с нелинейными свойствами является морская поверхность. Пока амплитуда колебаний (в данном случае — это высота волн)

невелика, форма волны — синусоида. При достижении достаточно большой амплитуды колебаний волны становятся нелинейными, то есть их форма определяется их амплитудой — возникают «барашки». При дальнейшем увеличении амплитуды волны и вовсе теряют сходство с синусоидой.

Число примеров нелинейных колебаний систем, существующих в природе и в технике, может быть продолжено.

Общим свойством всех нелинейных элементов является их способность исказить подаваемый на их вход сигнал. В частности, если входной сигнал является синусоидальным с частотой ν , на выходе он таковым уже не является. При подаче на вход такого преобразователя колебаний некоторой частоты ν_1 на выходе возникают колебания не только частоты ν_1 , но и гармоники, то есть колебания частот $2\nu_1$, $3\nu_1$ и т. д. Поэтому такие элементы называют нелинейными преобразователями частоты.

Рассмотрим в качестве примера нелинейного преобразователя частоты полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого может быть аппроксимирована параболой:

$$i = a + bu + cu^2,$$

где a , b и c — некоторые константы. Пусть напряжение u , подаваемое на диод, меняется по закону

$$u = U_0 \cos \omega t = U_0 \cos 2\pi \nu t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} i &= a + bU_0 \cos 2\pi \nu t + cU_0^2 \cos^2 2\pi \nu t = \\ &= a + bU_0 \cos 2\pi \nu t + \frac{cU_0^2}{2} (1 + \cos 4\pi \nu t) = \\ &= \left(a + \frac{cU_0^2}{2} \right) + bU_0 \cos 2\pi \nu t + \\ &\quad + \frac{cU_0^2}{2} \cos 4\pi \nu t. \end{aligned}$$

Таким образом, ток через рассматриваемый преобразователь не является гармоническим, а представляет собой сумму трех компонент: постоянной составляющей, колебаний с основной частотой ν и колебаний с удвоенной частотой 2ν .

Если зависимость $i(u)$ является более сложной и поэтому она должна быть представлена большим числом слагаемых:

$$i = a + bu + cu^2 + du^3 + \dots + lu^k,$$

то выходной сигнал будет содержать гораздо больше высших гармоник (2ν , 3ν , ..., $k\nu$).

Еще более сложная картина получается на выходе, если на вход нелинейной системы поступает сигнал более сложный, чем синусоидальный. Особый интерес представляет случай, когда входной сигнал является суммой двух синусоидальных сигналов с частотами ν_1 и ν_2 . Оказывается, что на выходе в этом случае возникают не только гармоники каждой из частот, но и так называемые комбинационные частоты: $\nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 - \nu_2$, $2\nu_1 + \nu_2$ и т. д. (это можно показать, проведя рассуждения, аналогичные вышеприведенным). В общем виде комбинационные частоты можно представить так: $n\nu_1 \pm m\nu_2$, где n и m — любые целые числа.

Измерение частоты излучения лазера

Теперь мы можем вернуться к конкретной задаче — как измерить частоту лазерного излучения. Но сначала познакомимся с общим принципом измерения частот, близких к эталонным. Исследуемые колебания вместе с эталонными подаются на нелинейный преобразователь. Как мы уже говорили, на выходе возникают различные комбинационные частоты, среди которых есть частота $\nu_1 - \nu_2$, называемая частотой биений. При условии, что частоты ν_1 и ν_2 близки друг другу, частота биений оказывается очень малой и ее можно измерить обычными методами (например, с помощью осциллографа). При этом, хотя относительная ошибка измерения частоты колебаний с помощью осциллографа довольно большая ($\approx 10^{-4}$), абсолютная ошибка измерения оказывается порядка 1 — 10 гц. А поскольку эталонные частоты имеют величину примерно 10^{10} гц, то относительная ошибка измерения таких высоких частот будет 10^{-9} — 10^{-10} .

Для измерения частот, сильно отличающихся от эталонной, кроме цезиевого эталона, являющегося первичным эталоном частоты, необходимо иметь набор вторичных эталонов.

Значения частот вторичных эталонов изменяются плавно, что позволяет добиться большой близости частот и получить как можно меньшую частоту биений. Точность вторичных эталонов не хуже, чем точность первичного эталона, так как они постоянно проверяются с помощью цезиевого эталона.

Итак, если сравниваемые частоты имеют различный масштаб, меньшую из частот путем многократного умножения повышают до значения, близкого к большей частоте. При этом, если исследуемое колебание происходит с частотой, меньшей эталонной, умножают его частоту. Если же исследуемое колебание более высокочастотное, как в случае излучения лазера, умножение надо производить для эталона частоты.

Вот, например, как была измерена частота лазера на парах синильной кислоты HCN (длина волны $3,4 \times 10^{-2}$ см, частота 890 758 Мгц). Это излучение с помощью нелинейного преобразователя смешивалось с двенадцатой гармоникой сигнала, испускаемого генератором сверхвысокочастотных колебаний (клизстроном). На выходе нелинейного преобразователя возникали колебания разностной частоты, равной 30 кгц. Частота клизстрома находится в той же области спектра, что и частота цезиевого эталона, поэтому ее можно измерить непосредственно. А зная частоту клизстрома и разность частот (частоту биений), легко определить частоту лазерного излучения.

После того как была измерена частота излучения лазера на парах синильной кислоты, стало возможным измерение частоты более коротковолнового излучения. Так, была измерена частота излучения лазера на парах тяжелой воды D₂O (длина волны $8,4 \cdot 10^{-3}$ см, частота 3 557 143 Мгц), которая близка к четвертой гармонике излучения предыдущего лазера ($890\,758\text{ Мгц} \times 4 = 3\,563\,032\text{ Мгц}$). Затем были измерены частоты лазера на углекис-

лом газе (длина волны 10^{-3} см, частота 28 306 251 Мгц).

Недавно удалось измерить частоту гелий-неонового лазера с длиной волны 3,39 мкм. Она оказалась равной $\nu = (88\,376\,181\,627 \pm 50) \cdot 10^3$ гц. Точные измерения длины волны λ того же излучения, выполненные с помощью криптонового эталона длины интерферометрическим методом, дали результат $\lambda = (3,392231376 \pm 0,000000012)$ мкм. Пользуясь уравнением (1), на основании этих результатов удалось получить значение скорости света с небывалой точностью: $c = (299\,792\,456,2 \pm 1,1)$ м/с. Относительная ошибка такого результата составляет величину $3,5 \cdot 10^{-9}$. Такая точность в сотни раз выше, чем максимальная точность измерения скорости света прямым методом, основы которого были заложены еще Галилеем.

Таким образом, развитие лазерной техники привело к уточнению значения одной из основных фундаментальных постоянных — скорости света — более чем в сто раз.



ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

А.Б. Хацет

1. Решение должно быть оптимальным

В населенный пункт B необходимо организовать бесперебойную доставку грузов из пункта A . В пункте A имеется достаточное, практически неограниченное количество автомашин различного тоннажа, но количество грузов, отправляемых из A в B в единицу времени, ограничено из-за дорожных условий.

Пункты A и B связаны сетью дорог, схема которой приведена на рисунке 1. Номером 1 на этой схеме обозначен пункт отправления A ,

номером 5 — пункт назначения B , номерами 2, 3, 4 — промежуточные пункты — перекрестки дорог. Направление движения указано стрелками. Каждый участок пути может пропустить за единицу времени не более определенного числа тонн грузов (обусловливаемого шириной участка пути в его наиболее узком месте, характером покрытий, состоянием мостов и др.). Назовем это число *пропускной способностью* и будем считать его известным для каждого из участков пути, соединяющих какие-либо два пункта на нашей схеме.

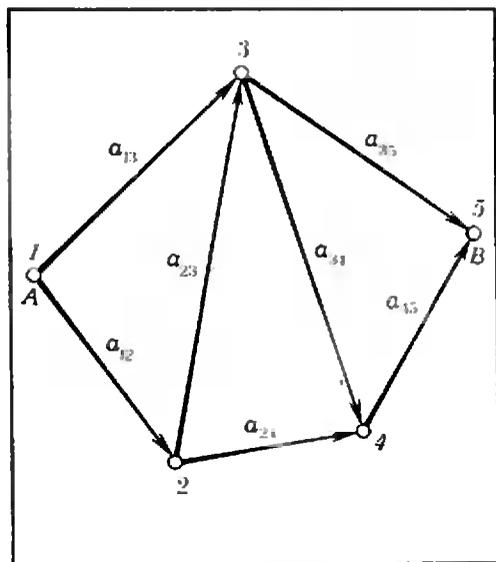


Рис. 1.

Пропускную способность участка, ведущего из пункта i в пункт j (участка $i - j$), обозначим через a_{ij} (Т/час).

Допустим, что мы стремимся отправлять в каждую единицу времени из A в B грузов как можно больше. Не следует, однако, думать, что для этого нужно стравлять ежедневно a_{12} тонн по участку $1-2$ и a_{13} тонн по участку $1-3$: ведь может оказаться, что из-за недостаточной пропускной способности других участков пути в каких-то промежуточных пунктах образуются «пробки», в результате чего движение нарушится или прекратится совсем. Например, если $a_{12} > a_{23} + a_{24}$, то «пробка» возникнет на перекрестке 2. Значит, для наилучшей организации транспортировки грузов из A в B *) нам нужно решить такую задачу: определить, сколько тонн грузов нужно ежедневно провозить по каждому участку дорожной сети, связывающей пункты A и B , чтобы при этом не превысить пропускной способности ни одного из участков сети, не создать ни одной «пробки» в промежуточных пунктах и чтобы количество грузов, ежедневно доставляемых в B , было наибольшим.

*) Такую организацию снабжения называют оптимальной.

Искомое количество грузов, провозимых по участку $i - j$ ежедневно (объем перевозок), обозначим через x_{ij} (Т/час).

Итак, задача поставлена. Но как ее решить?

2. Листая старые номера «Кванта»

Просматривая комплект журнала «Квант» за 1970 год, в разделе «Сети и потоки» статьи М. Н. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» находим нашу задачу, только в несколько более «ученой» одежде.

Оказывается, схемы, составленные из точек и стрелок (как на рисунке 1), называются ориентированными графами, причем точки — вершинами, а стрелки — дугами графа. Каждая дуга имеет определенное направление (откуда и название — ориентированный граф), поэтому одна из соединяемых ею вершин — начальная, другая — конечная; говорят также, что дуга выходит из начальной вершины и входит в конечную. Вершина, являющаяся для всех связанных с ней дуг начальной (конечной), называется входом (выходом) графа (на рисунке 1 — вершины 1 и 5 соответственно). Ориентированный граф с одним входом и одним выходом — это и есть транспортная сеть (именно таков граф на рисунке 1). Вершины транспортной сети, не являющиеся входом или выходом, называются промежуточными.

Остановим на минуту этот поток терминов и переведем дух. Конечно, замена слов «сеть дорог» — «транспортная сеть», «пункт» — «вершина», «участок пути» — «дуга» нас к решению не приблизит. Зато выяснилось, что мы не первые заинтересовались подобной проблемой. Проявите еще немного терпения — и вы придете к широко известной в математике формулировке нашей задачи.

Искомую величину объема перевозок x_{ij} называют потоком по

дуге $i-j$, а сумму потоков по всем дугам, выходящим из входа сети (в нашем случае $x_{12} + x_{13}$), — потоком по сети. Теперь, наконец, нашей задаче можно придать «парадную форму».

Задача о максимальном потоке. Дана транспортная сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность. Требуется определить потоки по дугам сети, не превосходящие соответствующих пропускных способностей, так, чтобы для любой промежуточной вершины сумма потоков по входящим дугам была равна сумме потоков по выходящим дугам («условие непрерывности потока») и чтобы поток по сети был наибольшим из возможных.

Итак, наша задача — частный случай задачи о максимальном потоке (условие непрерывности потока — это знакомое нам условие отсутствия транспортных «пробок»). Пользуясь введенными обозначениями, ее можно сформулировать так:

Найти такие величины x_{ij} потоков по дугам, при которых достигается максимума величина потока по сети

$$X = x_{12} + x_{13} \quad (1)$$

при следующих условиях:

а) ограниченность пропускных способностей дуг

$$\begin{aligned} x_{12} &\leq a_{12}, & x_{13} &\leq a_{13}, & x_{23} &\leq a_{23}, \\ x_{24} &\leq a_{24}, & x_{34} &\leq a_{34}, & x_{35} &\leq a_{35}, \\ & & & & x_{35} &\leq a_{35}. \end{aligned} \quad (2)$$

б) непрерывность потока в промежуточных вершинах

$$\begin{aligned} x_{12} - x_{23} - x_{24} &= 0, \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} &= 0, \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При установившемся потоке количество грузов, вывозимых из входа 1, должно быть равно количеству грузов, поступающих за то же время на выход 5 (иначе нарушилось бы условие непрерывности потока):

$$X = x_{12} + x_{13} = x_{35} + x_{45}. \quad (4)$$

Раз мы нашли в статье М. И. Башмакова формулировку нашей задачи, естественно там же искать и решение. И действительно — углубившись

в чтение, находим изложение алгоритма Форда — Фолкерсона, с помощью которого можно определить все значения x_{ij} (предполагая, правда, что это целые числа). Надо только запастись терпением; чтобы разобрататься в алгоритме и суметь применить его, придется изрядно потрудиться. Не удивительно, если у читателей, недолюбливающих вычисления, возникнет в этом месте вопрос: а нельзя ли как-нибудь иначе?

3. О пользе аналогий

Посмотрите внимательно на уравнения (3). Чем-то они нам очень знакомы... Ба, да ведь если транспортную сеть считать электрической цепью, а объемы перевозок x_{ij} — величинами токов в соответствующих ветвях цепи, то уравнения (3) выражают просто 1-й закон Кирхгофа для промежуточных узлов цепи: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю (то есть сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из узла)!

Правда, эта аналогия не полная, поскольку закон Кирхгофа обычно формулируется для замкнутой цепи и относится к любому ее узлу; у нас же цепь не замкнута, а условия типа (3) неверны для крайних узлов 1 и 5. Однако можно так видоизменить задачу о потоке, что отмеченное расхождение устранится. С этой целью введем в транспортную сеть дополнительную дугу из выхода во вход сети (на рисунке 2 это красная дуга).

Пропускную способность новой дуги ограничивать не будем, а поток по ней примем равным X , то есть потоку по сети. По полученной обобщенной сети поток будет совершать уже замкнутый путь от входа к выходу по заданной транспортной сети, а затем — от выхода на вход по дополнительной дуге.

Тогда нашу задачу можно переформулировать так: определить такие объемы перевозок x_{ij} , при которых

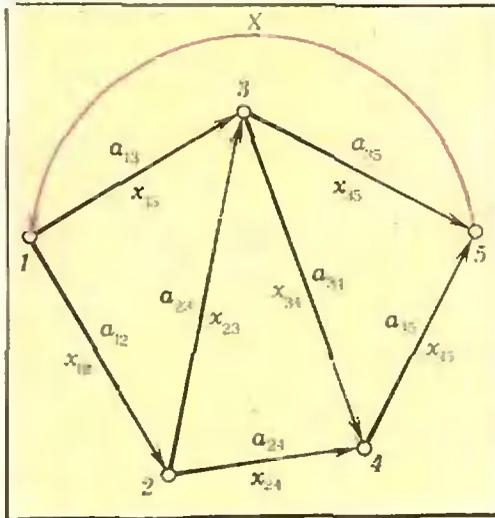


Рис. 2.

достигает максимума величина X (поток по сети) при ограничениях (2) и условиях (3) и (4) непрерывности потока во всех узлах:

$$\begin{aligned} X - x_{12} - x_{13} &= 0, \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} &= 0, \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} &= 0, \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} &= 0, \\ x_{35} + x_{45} - X &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Получилась полная аналогия с законом Кирхгофа, и поэтому возникает вопрос: а нельзя ли построить электрическую модель транспортной сети, в которой искомым потокам по дугам соответствовали бы токи в ветвях, определяемые непосредственным измерением без каких-либо вычислений? Мы покажем, что такую модель построить можно.

Естественно, что дугам сети в этой модели должны соответствовать ветви электрической цепи, а вершинам — узлы цепи.

З а м е ч а н и е. Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $\text{---} \circ \text{---}$ — источник тока указанного направления, a — сила тока в ветви; $\text{---} \uparrow \text{---}$ — источник напряжения, u — величина напряжения в ветви; $\text{---} \triangleright \text{---}$ — диод, пропускающий ток в направлении слева направо.

Для прохождения тока по цепи необходимо наличие в ней некоторой электродвигущей силы. Поэтому включим в дополнительную ветвь цепи источник единичного напряже-

ния — батарею, создающую в ветви 5—1 напряжение $U=1$ (положительный контакт батареи соединим с узлом 1). Чтобы модель соответствовала задаче, нужно обеспечить прохождение по каждой из основных ветвей цепи (соответствующих дугам исходной транспортной сети) тока лишь заданного направления, не превышающего определенной величины (равной пропускной способности дуги сети). С этой целью дугу $i-j$ заменим в модели ветвью $i-j$ электрической цепи с параллельно включенными диодом (пропускающим ток в нужном направлении) и источником тока, сила которого численно равна пропускной способности a_{ij} этой дуги.

Все указанные элементы цепи считаются идеальными: предполагается, что источник тока обеспечивает постоянную силу тока в ветви (независимо от напряжения на ее концах); источник напряжения поддерживает постоянное напряжение в ветви (независимо от силы проходящего по ней тока); диод пропускает ток лишь в одном направлении и при этом не оказывает сопротивления (т. е. при прохождении в этом направлении тока через диод не происходит падения потенциала). Кроме того, все проводники в цепи также считаются идеальными, их сопротивления полагаются равными нулю.

Понятно, что элементов, идеальных в этом смысле, в действительности не существует. Однако в пределах ограниченной точности модели сделанные нами предположения допустимы, тем более, что нас здесь интересуют принципиальные возможности модели, а не ее техническая реализация.

Итак, мы заменили дугу $i-j$ ветвью электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 3.

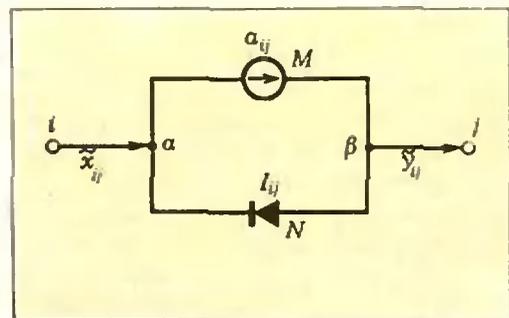


Рис. 3.

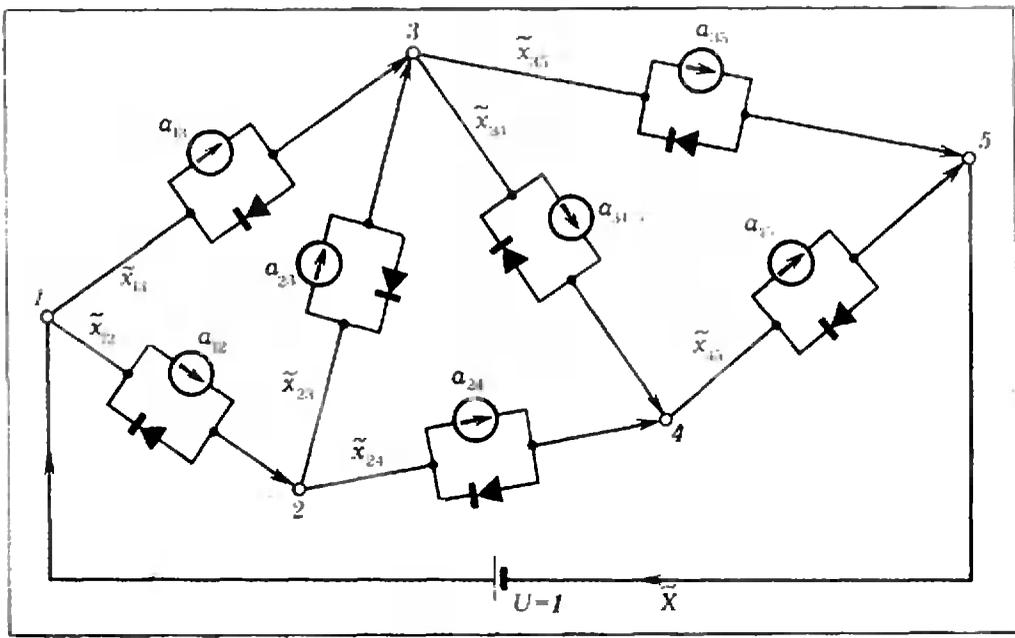


Рис. 4.

При этом в схеме ветви появились узлы α и β , которых в транспортной сети не было. Направление и величина тока в ветви $\alpha - M - \beta$, содержащей источник тока, вполне определяются этим источником; направление тока в ветви $\alpha - N - \beta$ определяется диодом; величину тока в ней обозначим I_{ij} . Токи в ветвях $i - \alpha$ и $\beta - j$ обозначим через \tilde{x}_{ij} и \tilde{y}_{ij} соответственно, направления этих токов указаны на схеме.

Применение закона Кирхгофа дает:

1) в узле α : $\tilde{x}_{ij} + I_{ij} = a_{ij}$ или $I_{ij} = a_{ij} - \tilde{x}_{ij}$ по свойству диода $I_{ij} \geq 0$, следовательно,

$$\tilde{x}_{ij} \leq a_{ij}. \tag{6}$$

2) в узле β : $a_{ij} = \tilde{y}_{ij} + I_{ij}$, то есть

$$\tilde{y}_{ij} = \tilde{x}_{ij}. \tag{7}$$

Значит, по основной ветви $i - j$ цепи идет ток заданного направления (от узла i к узлу j), величина которого \tilde{x}_{ij} не превосходит пропускной способности a_{ij} соответствующей дуги транспортной сети.

Введем теперь в рассмотрение потенциалы узлов цепи, обозначая через p_i потенциал i -го узла. Разность

потенциалов (напряжение) между узлами i и j будем обозначать u_{ij} : $u_{ij} = p_i - p_j$. В силу сделанного предположения на ветвях $i - \alpha$ и $\beta - j$ нет падения потенциала, поэтому $u_{ij} = u_{\alpha\beta}$.

По свойству идеального диода, если ток $I_{ij} > 0$, то разность потенциалов $u_{\alpha\beta} = u_{ij} = 0$. При $I_{ij} = 0$ u_{ij} может принимать любое, но неотрицательное значение, так как по цепи ток не может идти из j -го узла в i -й. Учитывая, что $I_{ij} = a_{ij} - \tilde{x}_{ij}$, можно написать

$$u_{ij} (a_{ij} - \tilde{x}_{ij}) = 0; u_{ij} \geq 0. \tag{8}$$

Это соотношение понадобится нам в дальнейшем.

Теперь мы уже можем построить модель всей транспортной сети. Ее схема представлена на рисунке 4. Ток и напряжение в дополнительной ветви обозначены через X и U соответственно; по правилам построения модели $U = 1$.

Мы утверждаем, что токи \tilde{x}_{ij} , устанавливающиеся в основных ветвях электрической модели транспортной сети, численно равны объемам перевозок по соответствующим дугам и дают решение задачи о максималь-

ном потоке для этой сети. При этом ток \tilde{X} в дополнительной ветви модели численно равен максимальному потоку по сети.

Если нам удастся это доказать, то построенная модель полностью решает нашу задачу: достаточно, приведя модель в действие, измерить амперметром токи x_{ij} в ветвях!

4. Итак — за работу

Чтобы убедиться, что численные значения токов \tilde{x}_{ij} в ветвях модели являются объемами перевозок, дающими решение задачи о максимальном потоке, нужно показать, что при $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$ выполняются условия (2) и (3) и что величина потока X в сети принимает наибольшее из возможных значений.

Но первую часть этого утверждения мы уже доказали. В самом деле, написав неравенства (6) для всех ветвей модели $\tilde{x}_{12} \leq a_{12}$, $\tilde{x}_{13} \leq a_{13}$, $\tilde{x}_{23} \leq a_{23}$, $\tilde{x}_{24} \leq a_{24}$, $\tilde{x}_{34} \leq a_{34}$, $\tilde{x}_{35} \leq a_{35}$, $\tilde{x}_{15} \leq a_{15}$, (9) получим, что для токов x_{ij} условия (2) выполнены, а применив 1-й закон Кирхгофа ко всем основным узлам модели, получим для токов x_{ij} пять соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{X} - \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{13} &= 0, \\ \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{23} - \tilde{x}_{24} &= 0, \\ \tilde{x}_{13} + \tilde{x}_{23} - \tilde{x}_{34} - \tilde{x}_{35} &= 0, \\ \tilde{x}_{24} + \tilde{x}_{34} - \tilde{x}_{45} &= 0, \\ \tilde{x}_{35} + \tilde{x}_{45} - \tilde{X} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

три средних из которых свидетельствуют о выполнении условия (3).

Значит, осталось только доказать, что величина \tilde{X} в электрической цепи есть наибольшее из возможных значений потока X , совместимых с условиями (2) и (3). Доказательство этого факта состоит из двух частей.

1. Покажем сначала, что для любых значений переменных x_{ij} , удовлетворяющих условиям (2) и (3), выполняется неравенство

$$X = x_{12} + x_{13} \leq \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij}, \quad (11)$$

где u_{ij} — численное значение напряжения в ветви $i - j$, а сумма берется по всем ветвям электрической цепи*), то есть покажем, что при любых допустимых объемах перевозок по дугам транспортной сети поток X по сети не превышает числа $\sum_{i,j} a_{ij} u_{ij}$.

В силу неравенств (2) и неотрицательности u_{ij} (см. (8)) имеем $x_{ij} u_{ij} \leq a_{ij} u_{ij}$; следовательно,

$$\sum_{i,j} x_{ij} u_{ij} \leq \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij}. \quad (12)$$

Вспомним теперь, что $u_{ij} = p_i - p_j$, где p_i, p_j — потенциалы соответствующих узлов. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} x_{ij} u_{ij} &= \sum_{i,j} x_{ij} (p_i - p_j) = x_{12} (p_1 - p_2) + \\ &+ x_{13} (p_1 - p_3) + x_{23} (p_2 - p_3) + \\ &+ x_{24} (p_2 - p_4) + x_{34} (p_3 - p_4) + \\ &+ x_{35} (p_3 - p_5) + x_{45} (p_4 - p_5) = \\ &= p_1 (x_{12} + x_{13}) + p_2 (-x_{12} + \\ &+ x_{23} + x_{24}) + p_3 (-x_{13} - x_{23} + \\ &+ x_{34} + x_{35}) + p_4 (-x_{24} - x_{34} + \\ &+ x_{45}) + p_5 (-x_{35} - x_{45}). \end{aligned}$$

Выражения в скобках при p_2, p_3 и p_4 равны нулю (см. (3)); при p_1 и p_5 равны X и $-X$ (см. (4)), $p_1 - p_5 = U = 1$; поэтому

$$\sum_{i,j} x_{ij} u_{ij} = p_1 X - p_5 X = (p_1 - p_5) X = X. \quad (13)$$

Учитывая (12), получаем нужное неравенство

$$\tilde{X} \leq \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij}.$$

2. Теперь покажем, что при значениях $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$, то есть для объемов перевозок, численно равных токам в ветвях построенной электрической модели, имеет место равенство

$$\tilde{X} = \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij}. \quad (14)$$

*) Символ \sum_{ij} обозначает сумму членов рассматриваемого вида, соответствующих всем возможным для данной задачи наборам значений индексов i, j . В нашем случае $\sum_{ij} a_{ij} u_{ij} = a_{12} u_{12} + a_{13} u_{13} + a_{23} u_{23} + a_{24} u_{24} + a_{34} u_{34} + a_{35} u_{35} + a_{45} u_{45}$.

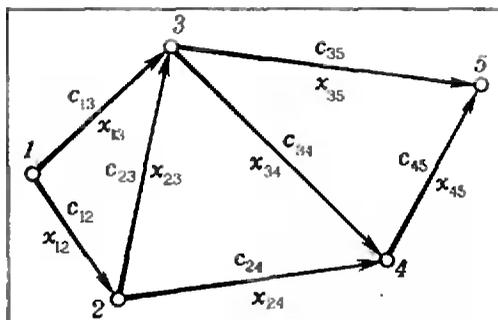


Рис. 5.

Это и будет означать, что \tilde{X} — наибольшее из возможных значений X .

Для доказательства равенства (14) воспользуемся соотношениями (8), описывающими свойства идеального диода:

$$u_{ij} (a_{ij} - \tilde{x}_{ij}) = 0 \quad \text{или} \quad a_{ij} u_{ij} = \tilde{x}_{ij} u_{ij}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\sum_{i,j} a_{ij} u_{ij} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} u_{ij}. \quad (15)$$

Поскольку для токов \tilde{x}_{ij} , \tilde{X} выполнены те же соотношения (1), (4), что и для x_{ij} и X , то

$$\sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} u_{ij} = \tilde{X}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует равенство (14). Это завершает доказательство того, что токи, установившиеся в ветвях построенной электрической модели транспортной сети, дают решение задачи о максимальном потоке.

Заметим, что форма транспортной сети, фигурировавшей в нашей задаче, для доказательства не существенна. Оно остается в силе для произвольной транспортной сети.

5. Попробуйте сами

Из тех же (идеализированных!) элементов — источников тока, источников напряжения и диодов — можно построить электрические модели для решения и других оптимизационных задач, связанных с транспортными сетями. Рассмотрим здесь одну такую задачу, имеющую большое значение в экономике.

Задача о минимизации транспортных затрат. Пусть дана транспортная сеть и известно, что стоимость перевозки единицы груза по дуге $i - j$ равна c_{ij} (см. рис. 5). Требуется определить объемы перевозок x_{ij} по ду-

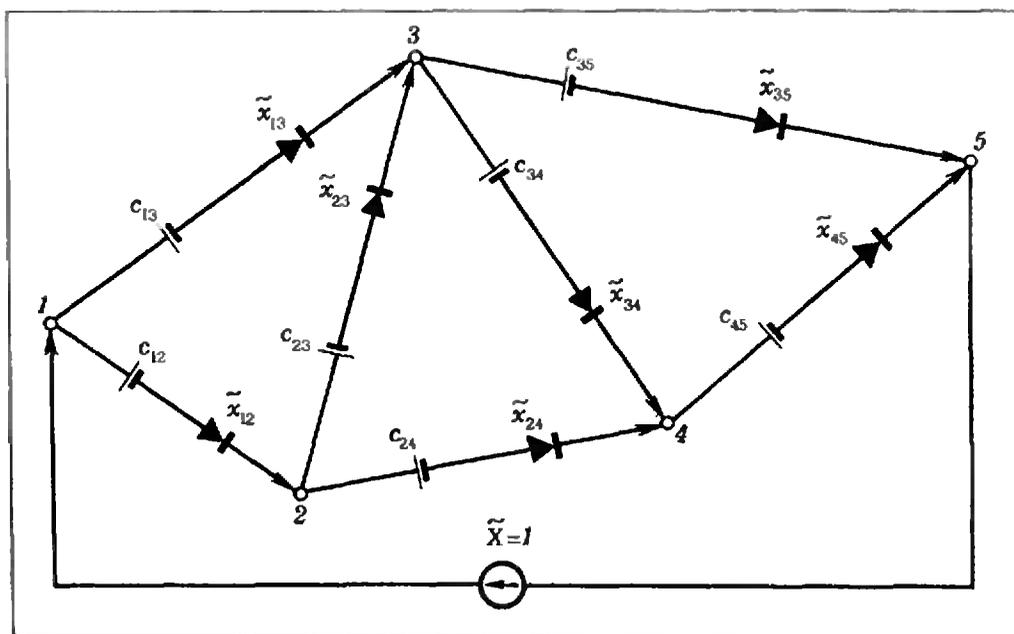


Рис. 6.

гам сети, при которых из входа сети в ее выход будет перевезена 1 единица груза, а суммарная стоимость перевозок будет минимальна.

Перевозка x_{ij} единиц груза по дуге $i - j$ стоит $c_{ij}x_{ij}$.

Поэтому общие затраты на перевозку равны

$$S = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}. \quad (17)$$

Нужно найти такие значения величин x_{ij} , при которых S принимает наименьшее из возможных значений и которые удовлетворяют условиям:

а) непрерывности потока в промежуточных узлах (см. (3));

б) нестригательности съёмов перевозок: $x_{ij} \geq 0$;

в) равенства единице суммарного потока по сети:

$$X = x_{12} + x_{13} = x_{35} + x_{45} = 1. \quad (18)$$

Для построения электрической модели транспортной сети этой задачи нужно заменить каждую дугу $i - j$ ветвью с последовательно включенными диодом и источником напряжения, величина которого численно равна c_{ij} , а в дополнительную ветвь из выхода на вход сети включить единичный источник тока. Соответствующая схема представлена на рисунке 6.

Можно доказать...

Но нам уже пора поставить точку. Читатели, заинтересовавшиеся этими вопросами, могут попробовать свои силы, решая следующие

Упражнения

1. Докажите, что токи \tilde{x}_{ij} , которые устанавливаются в ветвях электрической цепи, изображенной на рисунке 6, дают решение задачи минимизации транспортных затрат.

2. Докажите, что каждый ненулевой ток по ветви этой цепи обязательно равен 1, т. е. что в действительности ток не разветвляется в узлах, а идет от входа к выходу по определенному пути («путь минимальных затрат»).

3. Используя задачу о минимизации транспортных затрат, покажите, как с помощью той же модели (рис. 6) можно определить кратчайший путь по дугам транспортной сети, ведущий от входа к выходу.

На сборе в пятом-б

— Сегодня я покажу вам фокус, — объявила пионервожатая Лена. — Согласны?

— Согласны! — послышались голоса пятиклассников.

— А какой фокус? — спросил Сережа. — Я тоже знаю, фокус с иголкой...

— Я покажу арифметический фокус, — сказала Лена. — Пусть каждый из вас задумает какую-нибудь цифру. Только мне не говорите, — объявила Лена. Теперь умножьте это число на 5. К произведению прибавьте 4 и удвойте полученную сумму. Готово?

— Теперь прибавьте еще 99, — сказала Лена, — и у каждого из вас получится трехзначное число. Оставьте в этом числе только последнюю цифру, а первые две зачеркните.

— Как это: зачеркнуть? — спросил Юра.

— Например, у тебя получилось число 364, — сказала Лена. — Если зачеркнуть первые две цифры, то останется только 4.

— К тому, что осталось, продолжала Лена, — прибавьте 28, а потом разделите на 5.

София, сидевшая на последней парте, быстро сосчитала и рассмеялась.

— Почему ты смеешься? — спросила Лена. — Иди сюда. — И она тихонько сказала Софии на ухо:

— У тебя получилось 7.

— Верю, — обрадовалась София. — А как ты узнала?

— А у меня сколько получилось? — нетерпеливо спросил Сережа.

Лена подошла к нему и тихонько сказала:

— У тебя получилось 7.

Потом Лена подошла ко всем по очереди и каждому сказала:

— У тебя получилось 7.

Как Лена могла узнать, что у каждого получилось семь?



ДИФРАКЦИОННАЯ ОКРАСКА НАСЕКОМЫХ

В. И. Арабаджи

Дифракционная (структурная) окраска птиц, бабочек и жуков весьма распространена в природе. Большое разнообразие в оттенках дифракционных цветов свойственно павлинам, фазанам, черным анстам, колибри, бабочкам тропической зоны и многим видам жуков (среди них рогаши, долгоносики, листоеды и др.). Дифракционную окраску животных изучали не только биологи, но и физики, например Релей, Вуд, Майкельсон.

Внешняя поверхность оперения у многих птиц и верхний покров тела бабочек и жуков характеризуются регулярным повторением элементов структуры с периодом от одного до нескольких микрон. У некоторых животных подобные структуры могут покрывать тело в несколько слоев, образуя многэтажную (объемную) дифракционную решетку.

Наряду с дифракционной животные могут иметь и чисто интерференционную окраску, образующуюся на тонких и прозрачных внешних покровах (клинообразных по сечению вдоль основной оси симметрии) с толщиной оптически деятельного слоя от десятых долей микрона до нескольких микрон.

На рисунках 1 и 2 вы видите снимки крыла бабочки-переливницы и спинки жука — азиатского листоеда (выбраны участки с дифракционной окраской). Снимки 1, 2, 3 получены с помощью микроскопа со стократным увеличением. Для выявления элементов структуры использовалось боковое освещение. На сним-

ках четко видно повторение элементов структуры.

Цвет поверхностного покрова может изменяться в зависимости от того, под каким углом падает свет на поверхность решетки, как ориентированы лучи света по отношению к элементам структуры, под каким углом рассматривается поверхность.

Очевидно, что окраска поверхности связана с отражением лучей. Рассмотрим количественно дифракцию в отраженном свете. Пусть лучи света падают на решетку под углом θ_0 и отражаются от нее под углом θ (рис. 4). Разность хода лучей 1 и 2 равна

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = d \sin \theta_0 - d \sin \theta, \quad (1)$$

или

$$\Delta = 2d \cos \frac{\theta_0 + \theta}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2}. \quad (2)$$

Поскольку для дифракционных максимумов $\Delta = k\lambda$ ($k = 1, 2, \dots$), то

$$k\lambda = 2d \cos \frac{\theta_0 + \theta}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2}. \quad (3)$$

Наибольшая энергия локализована в первом дифракционном максимуме ($k = 1$). Для этого максимума, полагая, что θ близко к θ_0 , из выражения (3) получим

$$\lambda = (\theta_0 - \theta) d \cos \theta_0 \quad (4)$$

Пусть $\theta_0 = 65^\circ$ (в рассматриваемом случае дифракция в отраженном свете наблюдается при наклонном падении лучей), а $\theta_0 - \theta = 3^\circ$ (примерно $0,05 \text{ рад}$). Тогда, например, для $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ длина волны ди-



Рис. 1.



Рис. 2.



Рис. 3. Структура центральных глазков хвостового оперения павлина. Цвет глазков меняется в зависимости от того, как падает на них свет, под каким углом мы на них смотрим. (На фотографии, помещенной на первой странице обложки, эти глазки синие.)

фрагментированного света из уравнения (4) равна $\lambda \approx 0,4 \cdot 10^{-4}$ см.

Полученная величина λ соответствует синей области спектра. Чаще всего дифракционная окраска в природе наблюдается в зеленом, синем

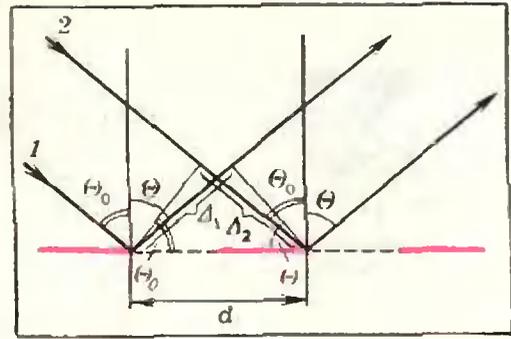


Рис. 4.

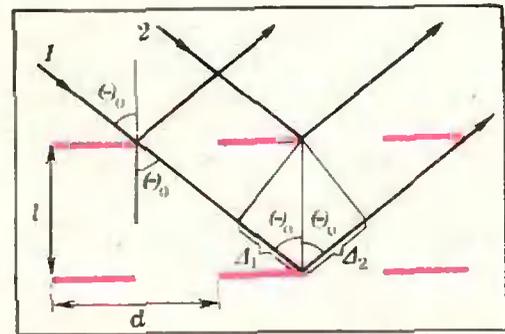


Рис. 5.

или голубом свете. Из формулы (4) видно, что длина волны λ зависит от угла падения света θ_0 . Действительно, если освещать поверхность под разными углами, окраска может изменяться.

В случае многослойной дифракционной решетки условие образования дифракционных максимумов описывается уравнением

$$k\lambda = 2l \cos \theta_0, \quad (5)$$

где l — расстояние между соседними слоями решетки. Это уравнение получается путем определения разности хода $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ между лучами 1 и 2 (рис. 5) и замены Δ для дифракционных максимумов через $k\lambda$.

Полагая $k = 1$, из выражения (5) получим

$$\cos \theta_0 = \frac{\lambda}{2l}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что дифракция на многослойной структуре возможна при $2l > \lambda$.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Прямая Эйлера

Э. Г. Готман

Свойства треугольника были хорошо изучены еще древними греками.

В знаменитых «Началах» Евклида доказывается, что центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

Архимед, определяя положение центра тяжести однородной треугольной пластинки, установил, что он лежит на каждой из трех медиан. Точку пересечения медиан треугольника называют *центром тяжести* или *центроидом* треугольника.

Позднее было доказано, что три высоты треугольника также пересекаются в одной точке, которая называется его *ортоцентром*.

Закономерность в расположении этих трех замечательных точек треугольника — центра O описанной окружности, центроида G и ортоцентра H — впервые обнаружил знаменитый математик Леонард Эйлер (1707—1783). Рассмотрим сначала один частный случай: прямоугольный треугольник ABC (рис. 1). Середина O гипотенузы AB является центром описанной около него окружности. Центроид G делит медиану CO в отношении $2:1$, считая от вершины C . Катеты AC и BC являются высотами треугольника, поэтому вершина C прямого угла совпадает с ортоцентром H треугольника. Таким образом, точки O , G , H лежат на одной прямой, причем $\vec{OH} = -3\vec{OG}$. Пользуясь методом координат,

Эйлер доказал, что такая же связь существует между тремя указанными точками любого треугольника. Мы докажем этот факт с помощью векторов, причем от читателя требуется знакомство лишь с простейшими операциями: сложением векторов и умножением вектора на число.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть A , B и O — данные точки плоскости, и известно, что точка G делит отрезок AB в отношении k : $\frac{\vec{AG}}{\vec{GB}} = k$ (рис. 2). Выразим вектор \vec{OG}

через векторы \vec{OA} и \vec{OB} . Для этого подставим в равенство $\vec{AG} = k \times \vec{GB}$ выражения всех векторов через \vec{OG} , \vec{OA} и \vec{OB} : $\vec{OG} - \vec{OA} = k(\vec{OB} - \vec{OG})$. Решая это уравнение относительно \vec{OG} , получим

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1+k}. \quad (1)$$

Например, если G — середина отрезка AB , то $k = 1$ и $\vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

Теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке

Здесь мы попутно получим одно векторное равенство, которое понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 1. Медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке G и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины, причем

$$3\vec{PG} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}, \quad (2)$$

где P — любая точка плоскости или пространства.

Доказательство. Возьмем на медиане CD треугольника ABC точку G , определяемую соотношением $|CG| : |GD| = 2 : 1$ (рис. 3). Согласно формуле (1),

$$\vec{PG} = \frac{\vec{PC} + 2\vec{PD}}{3},$$

$$\vec{PD} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB}),$$

откуда

$$\vec{PG} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}).$$

Вычисляя вектор \vec{PG} с концом в точке G' , делящей любую из двух других медиан треугольника в отношении $2:1$ (считая от вершины), мы получим справа то же самое выражение:

$$\vec{PG}' = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}),$$

поэтому $\vec{PG}' = \vec{PG}$, и точка G' совпадает с точкой G . Следовательно, все три медианы треугольника пересекаются в одной точке G , определяемой соотношением (2).

Теорема о высотах произвольного треугольника

Теорема 2. Высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H , причем

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}, \quad (3)$$

где O — центр окружности, описанной около треугольника.

Доказательство. Пусть ABC — треугольник, отличный от прямоугольного (рис. 4). Найдем сумму векторов \vec{OA} и \vec{OB} . Для этого

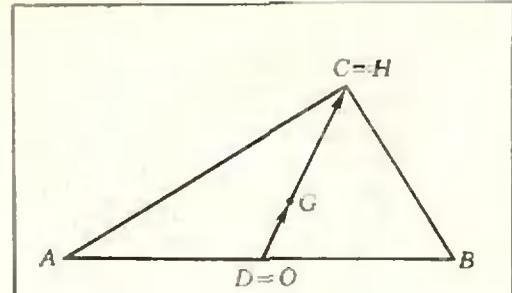


Рис. 1.

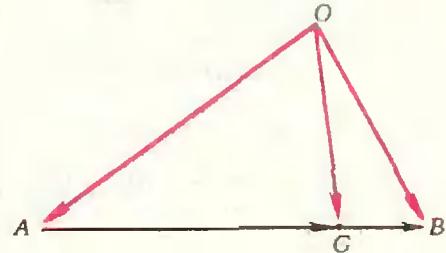


Рис. 2.

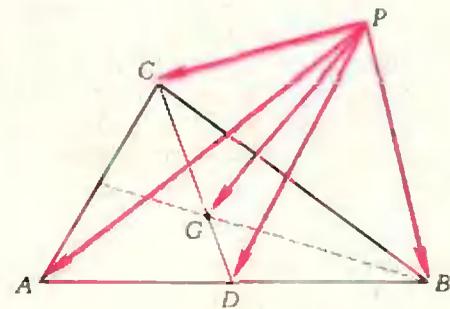


Рис. 3.

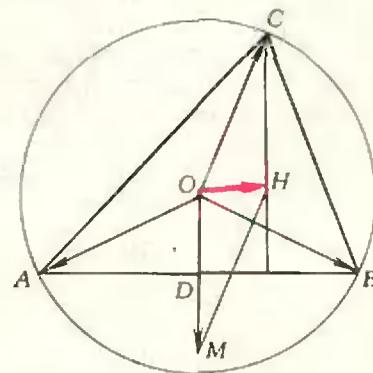


Рис. 4.

построим точку M , симметричную O относительно стороны AB , тогда $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$. Затем построим точку H , для которой

$$\vec{OH} = \vec{OM} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC},$$

и докажем, что точка H и есть ортоцентр треугольника ABC .

Действительно, по построению прямые CH и OM параллельны, OM — серединный перпендикуляр к отрезку AB , следовательно, прямая CH также перпендикулярна к прямой AB , и точка H лежит на высоте треугольника ABC , проведенной из вершины C .

Если повторить построение, начиная с векторов \vec{OA} и \vec{OC} , то получится та же точка H , но те же рассуждения показывают, что теперь точка H лежит на высоте треугольника, проведенной из вершины B . Аналогично получим, что точка H лежит на высоте, проведенной из вершины A . Следовательно, высоты треугольника ABC пересекаются в точке H , определяемой соотношением (3).

Легко проверить, что теорема 2 справедлива и для прямоугольного треугольника.

Прямая Эйлера

Из доказанных теорем 1 и 2 вытекает интересное нас свойство замечательных точек треугольника.

Теорема 3. *Центр O описанной окружности, центроид G и ортоцентр H любого треугольника лежат на одной прямой, причем точка G лежит между точками O и H и $|OG| : |GH| = 1 : 2$.*

Доказательство. По теореме 1

$$3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (3), получим

$$\vec{OH} = 3\vec{OG}.$$

Следовательно, векторы \vec{OH} и \vec{OG} , имеющие общее начало O , располо-

жены на одной прямой и

$$|\vec{OG}| : |\vec{GH}| = 1 : 2.$$

Прямая, на которой лежат точки O , G и H , называется *прямой Эйлера*.

* * *

В стереометрии простейший многогранник — тетраэдр (треугольная пирамида) играет ту же роль, что и треугольник в планиметрии. Свойства треугольника и тетраэдра во многом схожи. Попробуем распространить свойство замечательных точек треугольника на тетраэдр.

Сфера, описанная около тетраэдра

Известно, что около всякого тетраэдра можно описать сферу, ее центр O лежит на перпендикулярах к граням тетраэдра, восстановленных в центрах окружностей, описанных около граней.

Медианы тетраэдра

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называется *медианой* тетраэдра. Свойства медиан тетраэдра аналогичны свойствам медиан треугольника.

Теорема 4. *Четыре медианы тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке G , которая делит каждую из них в отношении $3 : 1$, считая от вершины тетраэдра, причем*

$$4\vec{PG} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}, \quad (4)$$

где P — любая точка пространства.

Доказательство. Возьмем на медиане DG_1 тетраэдра $ABCD$ точку G , определяемую соотношением $|DG| : |GG_1| = 3 : 1$ (рис. 5). Согласно формуле (1),

$$\vec{PG} = \frac{\vec{PD} + 3\vec{PG}_1}{4}.$$

Учитывая, что центроид G_1 треугольника \vec{ABC} удовлетворяет соотношению $3\vec{PG}_1 = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$, получим

$$\vec{PG} = \frac{1}{4} (\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}).$$

Вычисляя вектор \vec{PG}' с концом в точке G' , делящей любую из трех других медиан тетраэдра в отношении $3:1$ (считая от вершины), получим то же самое выражение. А это означает, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке G , удовлетворяющей соотношению (4). Точка G называется *центром тяжести* (или *центроидом*) тетраэдра.

Высоты тетраэдра

Высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке. По аналогии можно предположить, что высоты любого тетраэдра также пересекаются в одной точке. Однако это не так.

Для примера рассмотрим тетраэдр $ABCD$ с прямым двугранным углом при ребре AB , в котором $|AC| = |BC|$, но $|AD| \neq |BD|$ (рис. 6).

Высоты CE и DF тетраэдра лежат соответственно в гранях ABC и ABD , но точка E — середина AB , а F — нет. Если бы длины ребер DA и DB были равны, то основания E и F высот совпали бы, но две другие высоты тетраэдра не могут проходить через точку E .

Таким образом, даже две высоты тетраэдра могут не иметь общей точки.

Тем не менее существуют и тетраэдры, все четыре высоты которых пересекаются в одной точке. Таким будет, например, тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине D . Ребра DA , DB и DC являются его высотами, а вершина D — ортоцентром (точкой пересечения всех четырех высот).

Попробуем найти все тетраэдры, у которых высоты пересекаются в одной точке.

Пусть высоты тетраэдра $ABCD$, проведенные из вершин C и D , пересекаются в точке H (рис. 7). Тогда $CH_1 \perp AB$ и $DH_2 \perp AB$, то есть прямая AB перпендикулярна к двум

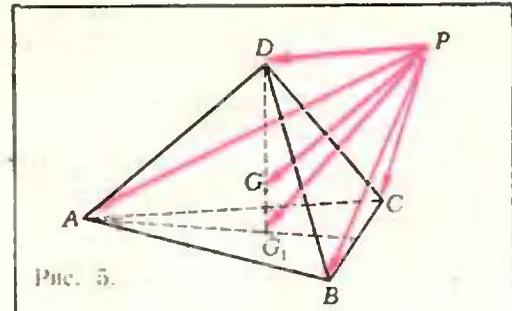


Рис. 5.

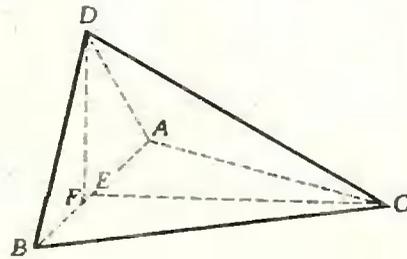


Рис. 6.

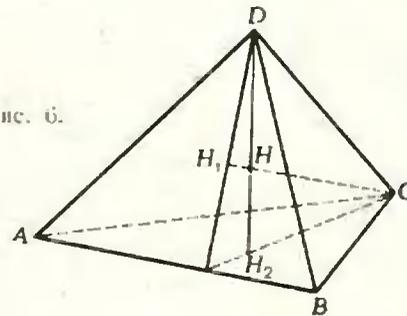


Рис. 7.

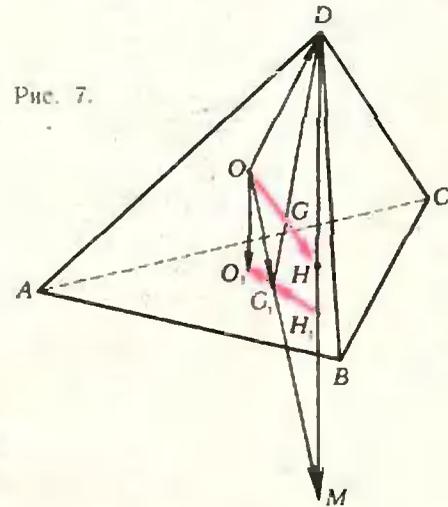


Рис. 8.

пересекающимися прямым, лежащим в плоскости CDH , следовательно, $AB \perp CD$. Аналогично доказывается, что если две другие высоты тетраэдра $ABCD$ проходят через ту же точку H , то $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$. Итак, если все высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Такой тетраэдр называется *ортоцентрическим*.

Теорема 5. *Четыре высоты ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке H , причем, если O — центр сферы, описанной около тетраэдра, то*

$$\vec{OH} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, DG_1 — его медиана, DH_1 — его высота (рис. 8). Тогда G_1 — центроид, а H_1 — ортоцентр треугольника ABC (докажите это самостоятельно — именно здесь используется перпендикулярность противоположных ребер тетраэдра), причем точки O_1 (центр окружности, описанной около треугольника ABC), G_1 и H_1 лежат на одной прямой. Заметим, что центр O сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, лежит на перпендикуляре к плоскости треугольника ABC , восстановленном в точке O_1 .

Будем доказывать теорему тем же способом, что и теорему 2 для треугольника: строить разными способами точку H , удовлетворяющую соотношению (5).

Вначале сложим векторы \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

По теореме 1 $\vec{OG}_1 = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, поэтому $\vec{OM} = 3\vec{OG}_1$ или $\vec{G}_1M = 2\vec{OG}_1$. Точки O_1 , G_1 , H_1 лежат на прямой Эйлера треугольника ABC , причем $\vec{H}_1G_1 = 2\vec{G}_1O_1$. Сле-

довательно,

$$\vec{H}_1M = \vec{H}_1G_1 + \vec{G}_1M = 2(\vec{G}_1O_1 + \vec{OG}_1) = 2(\vec{OG}_1 + \vec{G}_1O_1) = 2\vec{OO}_1.$$

Отсюда вытекает, что прямые H_1M и OO_1 параллельны, а так как прямая OO_1 перпендикулярна к плоскости ABC , то и прямая H_1M перпендикулярна к этой плоскости. Следовательно, точка M лежит на прямой DH_1 (если точки O и O_1 совпадают, то точки M и H_1 тоже совпадают).

Пусть теперь $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$. Из левого равенства следует, что точка H является серединой отрезка DM , то есть точка H лежит на высоте DH_1 тетраэдра.

Аналогично строится точка N : $\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}$ и та же точка N : $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{ON} + \vec{OC})$ и доказывается, что точка H лежит на высоте тетраэдра, проведенной из вершины C , и т. д.

Следовательно, высоты ортоцентрического тетраэдра пересекаются в одной точке H , определяемой соотношением (5).

Прямая Эйлера тетраэдра

Теорема 6. *Центр O описанной сферы, центроид G и ортоцентр H ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ лежат на одной прямой, причем точки O и H симметричны относительно точки G .*

Доказательство. По формулам (4) и (5)

$$\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}),$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}),$$

откуда $\vec{OH} = 2\vec{OG}$. Полученное равенство означает, что точки O , G , H лежат на одной прямой, причем точки O и H симметричны относительно точки G .

Прямую, на которой лежат точки O, G, H , можно назвать *прямой Эйлера ортоцентрического тетраэдра*.

У п р а ж н е н и я

Решите с помощью скалярного произведения векторов задачи 1—4.

1. а) Докажите, что если O — центр окружности, описанной около треугольника

ABC , и $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, то H — точка пересечения высот треугольника.

б) Докажите, что если O — центр сферы, описанной около ортоцентрического тетраэдра $ABCD$, и $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, то H — точка пересечения четырех высот тетраэдра.

2. Докажите, что если A, B, C и D — четыре произвольные точки пространства, то

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Пользуясь этим равенством, докажите, что

а) три высоты треугольника пересекаются в одной точке;

б) если противоположные ребра AB и CD , AD и BC тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны, то ребра CA и BD также перпендикулярны.

3. Докажите, что если A, B, C, D — четыре произвольные точки пространства, то

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

Пользуясь этим равенством, докажите, что

а) сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований;

б) диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны;

в) для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов его противоположных ребер были равны.

4. Докажите, что все плоские углы при одной вершине ортоцентрического тетраэдра либо одновременно острые, либо прямые, либо тупые и хотя бы одна его грань является остроугольным треугольником.

5. а) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно середин его сторон, а также точки, симметричные ортоцентру H относительно прямых BC , CA и AB , лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

б) Пусть H — ортоцентр тетраэдра $ABCD$, G_1 и H_1 — соответственно центроид и ортоцентр грани ABC , а G_2 и H_2 — такие

точки, что $\overrightarrow{HG_2} = 3\overrightarrow{HG_1}$ и $\overrightarrow{HH_2} = 3\overrightarrow{HH_1}$. Докажите, что точки G_2 и H_2 лежат на сфере, описанной около этого тетраэдра.

6. а) Докажите, что середины трех сторон, основания трех высот треугольника и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с тремя вершинами, лежат на одной окружности, а центр этой окружности (называемой *окружностью десяти точек*) лежит на прямой Эйлера.

б) Докажите, что центроиды четырех граней, основанная четырех высот ортоцентрического тетраэдра и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, в отношении 1:2 (считая от ортоцентра), лежат на одной сфере, а центр этой сферы (называемой *сферой двенадцати точек*) расположен на прямой Эйлера.

7. Докажите, что

а) если основание одной из высот тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани, то тетраэдр является ортоцентрическим;

б) основание любой из высот ортоцентрического тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани (эти свойства использованы при доказательстве теоремы 5).

Где ошибка

— Прямая теорема равносильна теореме, противоположной обратной, — сказал ученик Крестиков. — Если $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ — прямая теорема, то вместе с ней верна или неверна теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

— А что такое \overline{B} и \overline{A} ? — спросил ученик Нуликов.

— Так обозначаются отрицания утверждений B и A .

— А откуда ты знаешь, что они равносильны?

— Могу доказать.

— Давей.

— Пожалуйста. Пусть теорема $A \Rightarrow B$ верна, а теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ неверна. Тогда вер-

на теорема $\overline{B} \Rightarrow A$. Из этой верной теоремы и верной прямой теоремы следует, что $\overline{B} \Rightarrow B$. Ты же понимаешь, что так не бывает! Значит, на самом деле, теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ верна.

— Понятно, — сказал Нуликов.

Они встретились на другой день.

— Я доказал, что из прямой теоремы следует обратная, — сказал Нуликов.

— Этого не может быть!

Бывает, что прямая теорема верна, а обратная нет.

— А я тебе докажу!

— Ха! Попробуй!

— Пусть теорема $A \Rightarrow B$ верна. Нам надо доказать, что теорема $B \Rightarrow A$ тоже верна.

Предположим, что она неверна. Тогда верна теорема $B \Rightarrow \overline{A}$, ты сам говорил это в прошлый раз. Но ей равносильна теорема $A \Rightarrow \overline{B}$, а значит, она тоже верна. Получилось, что верны две такие теоремы: $A \Rightarrow B$ и $A \Rightarrow \overline{B}$, а это чепуха. Значит на самом деле теорема $B \Rightarrow A$ верна. — Ничего не понимаю, — пробормотал Крестиков.

— Я рассуждал так же как ты, — сказал Нуликов.

А теперь ответьте

1. Верно ли доказательство Крестикова?

2. Верно ли доказательство Нуликова?

3. Верно ли последнее заявление Нуликова?

В. И. Рыжик

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 апреля 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М306, М307» или «...Ф318». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом [в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений]. Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач [на конверте лопните: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»]. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М306 — М310; Ф318 — Ф322

М306. Из шахматной доски (8×8) удалена одна угловая клетка (1×1) (рис. 1). На какое наименьшее число равновеликих треугольников (одинаковых по площади) можно разрезать оставшуюся часть доски?

В. П. Федотов

М307. Плоскость разбита на одинаковые шестиугольные комнаты (рис. 2). В некоторых стенах проделаны двери так, что для любой вершины, в которой сходятся три стены (стороны шестиугольников), двери имеются ровно в двух стенах. Докажите, что любой замкнутый путь по такому лабиринту проходит через четное число дверей.

В. П. Голубятников

М308. Если при любом x

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \geq -1,$$

то для чисел a_1, a_2, \dots, a_n выполне-

но неравенство

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n.$$

Докажите это утверждение а) для $n = 2$; б) для $n = 3$; в) для любого натурального n .

Ю. И. Ионин

М309. а) При каких n многочлен $x^{2n} + x + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

б) При каких n число

$$\underbrace{10 \dots 010 \dots 01}_n \dots \underbrace{01}_n$$

делится на 37?

В. Г. Шлейфер

М310. Докажите, что среди n -значных чисел найдется более 8^n таких, в десятичной записи которых никакая группа цифр (в частности никакая цифра) не встречается два раза подряд.

Г. А. Гуревич

Ф318. При каком C_1 емкость системы конденсаторов, показанной на рисунке 3, равна: а) C ; б) kC ($k \neq 1$); в) C_1 ?

Б. Б. Буховцев

Ф319. На расстоянии $2F$ от собирающей линзы Π_1 с фокусным рас-

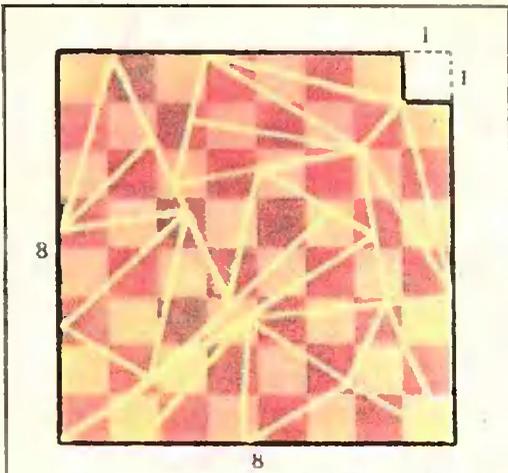


Рис. 1.

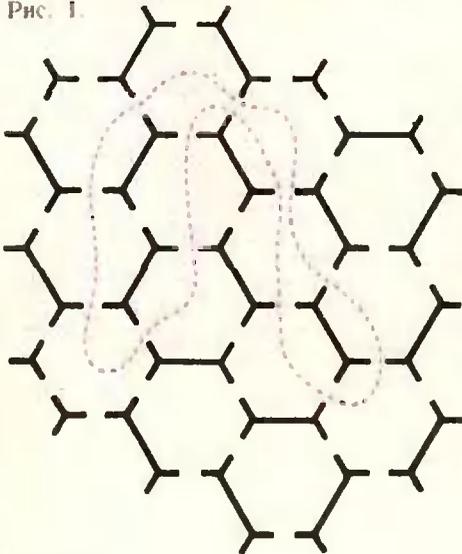


Рис. 2.

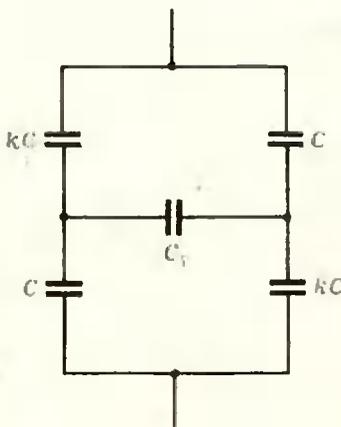


Рис. 3.

стоянием F находится светящийся предмет. Освещенность четкого изображения предмета на экране при этом равна E_0 . Между экраном и линзой L_1 поместили рассеивающую линзу L_2 с фокусным расстоянием $-2F$. Для получения четкого изображения предмета пришлось экран передвинуть на расстояние, равное F . Определить освещенность изображения предмета во втором случае.

В. Е. Белонучкин

Ф320. В откачанном сосуде емкостью $V = 1$ л находится 1 г гидрида урана UH_3 . При нагреве до температуры $t = 400^\circ C$ гидрид полностью разлагается на уран (атомный вес $A = 238$) и водород. Найти давление водорода в сосуде при этой температуре.

Ф321. На горизонтальную мембрану насыпан мелкий песок. Мембрана совершает колебания с частотой $\nu = 500$ гц в вертикальной плоскости. Какова амплитуда колебаний мембраны, если песчинки подскакивают на высоту $h = 3$ мм по отношению к положению равновесия мембраны?

Ф322. Две звезды вращаются вокруг общего центра масс с постоянными по абсолютной величине скоростями v_1 и v_2 с периодом T . Найти массы звезд и расстояние между ними.

Б. А. Лугозцов

Решения задач

M268—M272: Ф278—Ф284

M268. В углу шахматной доски стоит фигура. Первый игрок может ходить ею два раза подряд как обычным конем (на два поля в одном направлении, на одно — в перпендикулярном), а второй — один раз как конем с удлиненным ходом (на три поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном). Так они ходят по очереди. Первый стремится к тому, чтобы поставить фигуру в противоположный угол, а второй — ему помешать. Кто из них выигрывает (размеры доски — $n \times n$, где $n \geq 4$)?

Пусть вначале конь находится в левом нижнем углу доски. Понятно, что первый игрок первым же ходом может вывести коня из угла доски и поставить его на диагональ (см. рисунок 1 — синий крестик — это результат хода первого игрока). Докажем, что первый игрок может *каждый* своим ходом возвращаться на диагональ, причем все выше и выше.

Пусть первый игрок поставил коня на какую-то клетку диагонали доски (рис. 2). Клетки, в которые второй игрок может сместить коня с диагонали, помечены на рисунке 2 черными и красными крестиками. Из клеток, помеченных красными крестиками, первый игрок может вернуть коня на диагональ доски, сдвинув его при этом вверх ровно на одну клетку (в направлении нужного угла). Из клеток же, помеченных черными крестиками, первый игрок также может вернуться на диагональ, но уже не в следующую клетку, а через одну. Однако ясно, что ставить коня в клетки, помеченные черными крестиками, в конце игры второй игрок не сможет: доска ограничена, и когда до верхнего угла останется одно или два поля, верхняя и правая границы доски «отрежут» от получающейся конфигурации черные крестики — клетки (см. рис. 3); второй игрок будет вынужден начать ставить коня в клетки, помеченные красными крестиками. Понятно, что в таком случае первый игрок достигнет цели.

И. Н. Клаумова



M269. Обозначим через $T_k(n)$ сумму произведений по k чисел от 1 до n . Например, $T_3(4) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35$.

а) Найдите общую формулу для $T_2(n)$ и $T_3(n)$.

б) Докажите, что $T_k(n)$ выражается многочленом от n степени $2k$ (для каждого натурального $k \geq 2$).

в) Укажите метод нахождения многочленов $T_k(n)$ ($k = 2, 3, 4, \dots$) и примените его для отыскания многочленов $T_4(n)$ и $T_5(n)$.

Мы докажем, что $T_2(n)$, $T_3(n)$, $T_4(n)$ и $T_5(n)$ соответственно равны

$$\frac{(n+1)n(n-1)(3n+2)}{24}, \quad \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)}{48},$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8)}{5760}$$

и

$$\frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(3n^2 - n - 6)}{11520}$$

(попробуйте непосредственно доказать, что эти числа — целые при любом целом n), а также, что при любом k числа $T_k(n)$ являются значениями многочлена T_k степени $2k$ (со старшим коэффициентом $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2k)}$), для которого числа $-1, 0, 1, \dots, (k-1)$ служат корнями.

Заметим кстати, что $T_1(n)$ — сумма произведений чисел от 1 до n «по одному» — равна

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

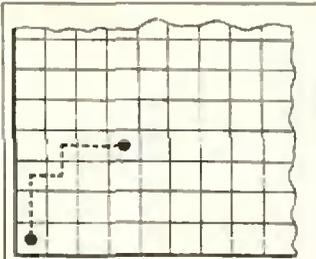


Рис. 1.

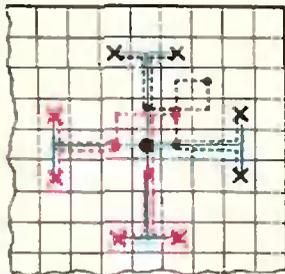


Рис. 2.

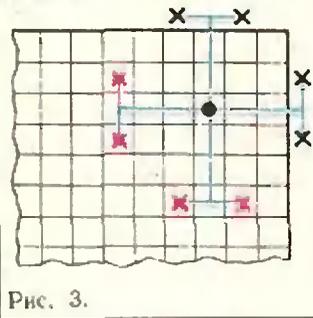


Рис. 3.

Первый способ. Можно найти формулы для $T_k(n)$, воспользовавшись известными формулами для сумм степеней натуральных чисел:

$$\sum i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ и т. д.}$$

(см., например, статьи В. С. Абрамовича в «Кванте» № 5, 1973 и № 6, 1974). Например, из равенства

$$(\sum i)^2 = \sum i^2 + 2 \sum_{i < j} ij$$

следует, что $T_2(n)$ равно

$$\sum_{i < j} ij = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n^2+n}{4} - \frac{2n+1}{6} \right) = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

(проверьте, что $T_2(2) = 2$, $T_2(3) = 11$, $T_2(4) = 35$, $T_2(5) = 85$).

Из равенства

$$(\sum i)^3 = \sum i^3 + 3 \sum_{i < j} ij^2 + 6 \sum_{i < j < k} ijk,$$

$$(\sum i)(\sum j^2) = \sum i^3 + \sum_{i < j} ij^2$$

следует $T_3(n) = \sum_{i < j < k} ijk =$

$$\frac{1}{6} ((\sum i)^3 - 3(\sum i)(\sum j^2) + 2\sum i^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{6} \times \left(\frac{n(n+1)}{8} - \frac{2n+1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48}$$

Ниже мы покажем, как можно найти $T_k(n)$, не пользуясь формулами для сумм степеней.

Рекуррентная формула. Если все слагаемые суммы $T_k(n)$ разбить на две группы: в одну включить те произведения, в которые входит n , в другую — остальные, то получится такая основная формула:

$$T_k(n) - T_k(n-1) = nT_{k-1}(n-1) \tag{1}$$

Она вместе с очевидным равенством

$$T_k(k) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k = k! \tag{2}$$

позволяет последовательно определить все числа $T_k(n)$ при $n \geq k$, если $T_{k-1}(n)$ уже известны. (Заметим, что если T_k и T_{k-1} — многочлены, то формула (1) должна выполняться при всех n , а не только при целых n , больших k ; пользуясь этим, легко убедиться, что $T_k(n)$ должно равняться 0 при целых n от (-1) до $(k-1)$, и найти значения $T_k(n)$ при целых n , указанные в таблице 1.) Из формулы (1) можно было бы вывести, что $T_k(n)$ — многочлен степени $2k$, если справа стоит многочлен $nT_{k-1}(n-1)$ степени $2k-1$ от n (см. статьи В. С. Абрамовича, упомянутые выше, или статью В. Н. Вагутена в «Кванте» № 2, 1972); однако мы не будем доказывать это отдельно, а сразу получим формулы для многочленов $T_k(n)$.

Таблица 1

$k \backslash m$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	3	1	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
2	25	7	1	0	0	0	2	11	35	85	175	322	546	870
3	90	15	1	0	0	0	0	6	50	225	735	1960	4536	9450
4	361	31	1	0	0	0	0	0	24	274	1624	6769	22449	63273
5	966	63	1	0	0	0	0	0	0	120	1764	13132	67234	269325

В этой таблице приведены числа $T_k(n)$ (в красную рамку заключены числа $T_k(k) = k!$).

Второй способ. Положим

$$C_x^m = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \quad (3a)$$

Мы будем рассматривать C_x^m как многочлен степени m от x . Легко проверить, что при всех x

$$C_{x+1}^m = C_x^m + C_x^{m-1}, \quad (x-m)C_x^m = (m+1)C_x^{m+1} \quad (3b)$$

Заметим, что

$$T_1(n) = \frac{(n+1)n}{2} = C_{n+1}^2 \quad (4a)$$

Предположим, что при некоторых $b_0^{k-1}, b_1^{k-1}, \dots$

$$T_{k-1}(n) = \sum b_m^{k-1} C_{n+1}^m \quad (4b)$$

и выберем b_m^k так, чтобы для многочленов (4b) и

$$T_k(n) = \sum b_m^k C_{n+1}^m \quad (5)$$

выполнялось равенство (1); поскольку, согласно (3b),

$$\begin{aligned} T_k(n) - T_k(n-1) &= \sum b_m^k (C_{n+1}^m - C_n^m) = \\ &= \sum b_m^k C_n^{m-1} = \sum b_{m+1}^k C_n^m, \quad nT_{k-1}(n-1) = n \sum b_m^{k-1} C_n^m = \\ &= \sum b_m^{k-1} (n-m) C_n^m + \sum b_m^{k-1} m C_n^m = \\ &= \sum b_m^{k-1} (m+1) C_n^{m+1} + \sum b_m^{k-1} m C_n^m = \\ &= \sum (b_m^{k-1} + b_{m-1}^{k-1}) C_n^m \end{aligned}$$

(всюду суммы берутся по всем m), то (1) будет выполняться, если положить

$$b_{m+1}^k = m(b_m^{k-1} + b_{m-1}^{k-1}). \quad (6)$$

При этом согласно (4a)

$$b_2^1 = 1; \quad b_m^1 = 0, \quad m \neq 2. \quad (7)$$

Составьте таблицу чисел b_m^k и докажите, что

$$\begin{aligned} b_m^k &= 0, \quad m \leq k \text{ и } m \geq 2k+1; \quad b_{2k}^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1); \\ b_{k+1}^k &= k!. \end{aligned} \quad (8)$$

Поэтому равенство (2) для многочлена (5) также выполнено. Отсюда следует, что $T_k(n)$ действительно задается формулой (5), в которой коэффициенты b_m^k находятся из равенств (6), (7).

Совершенно так же можно убедиться в том, что

$$T_k(n) = \sum d_m^k C_{n+m-k}^m \quad (9)$$

где коэффициенты d_m^k определяются условиями

$$\begin{aligned} d_2^1 &= 1; \quad d_m^1 = 0, \quad m \neq 2; \\ d_{m+1}^k &= -(m-k+1)d_m^{k-1} + md_{m-1}^{k-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Числа b_m^k

$k \backslash m$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	2	0	0	0
4	0	3	6	0	0
5	0	0	20	24	0
6	0	0	15	130	120
7	0	0	0	210	924
8	0	0	0	105	2380
9	0	0	0	0	2520
10	0	0	0	0	945
11	0	0	0	0	0

числа d_m^k

$k \backslash m$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	-1	0	0	0
4	0	3	1	0	0
5	0	0	-10	-1	0
6	0	0	15	25	1
7	0	0	0	-105	-56
8	0	0	0	105	490
9	0	0	0	0	-1260
10	0	0	0	0	945
11	0	0	0	0	0

Хотя формулы (10) для коэффициентов a_m^k менее удобны, чем (6) — для b_m^k , но сами числа несколько меньше, поэтому именно из формулы (9) удобно получить $T_4(n)$ и $T_8(n)$ в том виде, в котором они указаны в начале решения. Например, найдя числа d и используя соотношения (3), получим

$$\begin{aligned} T_4(n) &= \\ &= \left(\left(\left(105 \frac{n+4}{8} - 105 \right) \frac{n+3}{7} + 25 \right) \frac{n+2}{6} - 1 \right) C_{n+1}^5 = \\ &= C_{n+1}^5 (15n^3 + 15n^2 - 10n - 8). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично преобразуется формула для $T_8(n)$.

Числа $T_k(n)$ довольно часто встречаются в различных задачах по комбинаторике и алгебре; отличающиеся от них знаком числа $(-1)^{n+k-1} T_k(n)$ носят специальное название: числа Стирлинга.

Применения этих чисел и связывающие их тождества описаны, например, в книге Дж. Риордана «Введение в комбинаторный анализ» (М., ИЛ, 1963 г.).



M270. Пусть AB и CD — две хорды окружности, а точки K и H построены так, что все четыре угла KAB , KCD , HBA и HDC — прямые. Докажите, что прямая KH проходит через центр окружности и через точку пересечения AD и BC .

Прежде всего в условии нужно внести уточнение: хорды AB и CD должны быть непараллельны (в этом случае положение точек K и H определяется однозначно), и прямые AD и BC тоже непараллельны (обозначим их точку пересечения через E).

Вначале докажем, что прямая KH проходит через центр окружности. Пусть точка M равномерно движется по прямой KH ; обозначим через $M(t)$ ее положение в момент времени t через $M'(t)$ и $M''(t)$ — проекции точки $M(t)$ на прямые AB и CD соответственно. Начало отсчета и единицу времени выберем так, что $M(0) = K$, $M(1) = H$; тогда $M'(0) = A$, $M'(1) = B$, $M''(0) = C$, $M''(1) = D$. Ясно, что каждая из точек $M'(t)$ и $M''(t)$ равномерно движется по своей прямой.

При $t = \frac{1}{2}$ точки $M'(t)$ и $M''(t)$ попадают в середины от-

резков AB и CD , следовательно, точка $M\left(\frac{1}{2}\right)$ попадает в центр окружности — точку пересечения перпендикуляров к хордам AB и CD , восстановленных в их серединах.

Докажем теперь, что прямая KH проходит через точку E . При любом расположении точек A , B , C и D на окружности треугольники AEB и CED подобны (по двум углам), причем вершине A соответствует вершина C , вершине B — вершина D . Ясно, что при преобразовании подобия, переводящем $\triangle AEB$ в $\triangle CED$, каждая точка $M'(t) \in (AB)$ переходит в точку $M''(t) \in (CD)$ (с тем же значением t). Но основание E' высоты EE' треугольника AEB при этом переходит в основание высоты EE'' треугольника CED , то есть для некоторого $t = t_0$ одновременно $M'(t_0) = E'$ и $M''(t_0) = E''$, следовательно, $M(t) = E$.

Н. Б. Васильев



M271. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, \dots, n$ в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

Докажем, что требуемое расположение возможно.

Если целое число b равно полусумме целых чисел a и c , то $a + c = 2b$ — четное число, так что числа a и c имеют одну и ту же четность, то есть либо оба четны, либо оба нечетны. Поэтому, если расположить числа $1, 2, \dots, n$ таким образом, чтобы сначала шли все четные, а затем все нечетные числа, то число b может быть равно полусумме стоящих по разные

стороны от него чисел a и c лишь в том случае, если все эти три числа имеют одну и ту же четность. Таким образом, остается доказать, что требуемым образом можно расположить как четные числа от 1 до n , так и нечетные.

Но легко понять, что располагать числа $2, 4, 6, \dots, 2k$ или же числа $1, 3, 5, \dots, 2k-1$ можно в том же порядке, что и числа $1, 2, \dots, k$. Действительно, если $2b = \frac{2a+2c}{2}$

$$\text{или } 2b-1 = \frac{(2a-1) + (2c-1)}{2}, \quad \text{то } b = \frac{a+c}{2}.$$

Таким образом, задача сведена к упорядочиванию требуемым образом чисел $1, 2, \dots, k$ ($k = \frac{n}{2}$, если n четно, и $k = \frac{n+1}{2}$, если n нечетно). Так как для $n=1$ доказываемое утверждение справедливо, то справедливость его для любого натурального n вытекает из принципа математической индукции.

Проведенное рассуждение дает конкретный способ построения требуемого расположения чисел $1, 2, \dots, n$. В качестве примера проведем такое построение для $n=16$.

Проведенное рассуждение дает конкретный способ построения требуемого расположения чисел $1, 2, \dots, n$. В качестве примера проведем такое построение для $n=16$.

1
4 2 3 1
8 4 6 2 7 3 5 1
16 8 12 4 14 6 10 2 15 7 11 3 13 5 9 1



M272. Даны две окружности радиусов R и r , касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB .

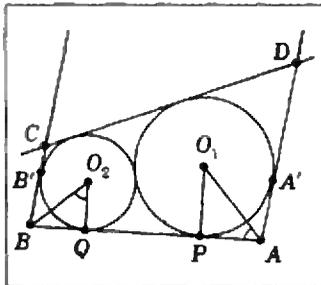


Рис. 4.

Без ограничения общности можно считать, что $R > r$ (если $R = r$, трапеция $ABCD$ становится прямоугольником со стороной AB , равной $2(R+r) = 4r$). Центр окружности радиуса R обозначим через O_1 , а центр окружности радиуса r — через O_2 . Кроме того, будем считать, что окружность O_1 касается основания AD , а окружность O_2 — основания BC . Пусть PQ — общая внешняя касательная к этим окружностям (точка P лежит на окружности O_1 , а точка Q — на окружности O_2 , см. рис. 1). Легко вычисляется, что длина отрезка PQ равна $2\sqrt{Rr}$.

Отложим на прямой PQ вне отрезка PQ отрезки PA и QB и выясним, при каком соотношении между длинами этих отрезков касательная AA' к окружности O_1 (отличная от AP) параллельна касательной BB' к окружности O_2 (отличной от BQ).

Эти касательные параллельны при условии, что сумма величин углов BAA' и ABB' равна 180° , то есть O_2BQ и O_1AP дополняют друг друга до прямого. Последнее условие означает равенство величин углов BO_2Q и O_1AP и, следовательно, пропорциональность

$$\frac{|BQ|}{|O_2Q|} = \frac{|O_1P|}{|AP|}.$$

Полагая $x = |BQ|$, $x' = |AP|$, условие параллельности касательных AA' и BB' можно записать так: $x \cdot x' = R \cdot r$. Длина отрезка AB равна в этом случае $x + \frac{Rr}{x} + 2\sqrt{Rr}$.

Если условие параллельности выполнено, то, обозначив через D и C точки пересечения второй общей внешней касательной к окружностям O_1 и O_2 с параллельными прямыми AA' и BB' , мы получим трапецию $ABCD$, удов-

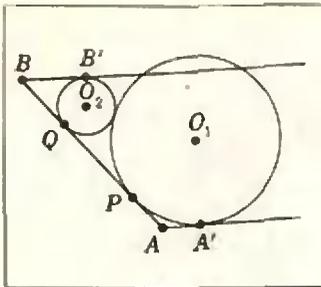


Рис. 5

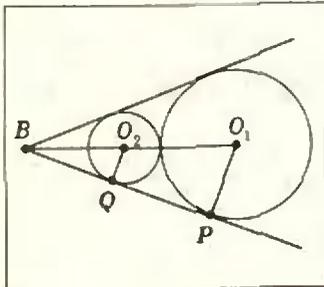


Рис. 6.

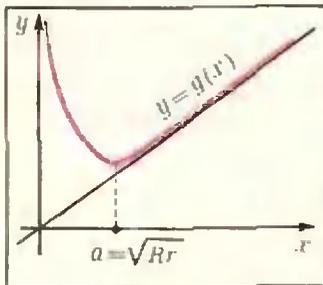


Рис. 7.

Ф278. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 760$ км над поверхностью Земли. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли $H = 40\,000$ км и минимальным расстоянием от поверхности $h = 760$ км. Насколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения спутника по новой, эллиптической, орбите?

летворяющую условию задачи. Однако это утверждение, кажущееся бесспорным при взгляде на рисунок 4, нуждается в уточнении. Посмотрите на рисунок 5. Если число x слишком велико, трапецию получить не удастся. Понятно, что число x должны быть меньше длины отрезка QB на рисунке 6. Докажите, что $|QB| = \frac{2r}{R-r} \sqrt{Rr}$.

Таким образом, осталось решить следующую задачу: найти наименьшее значение функции $f(x) = x + \frac{Rr}{x} + 2\sqrt{Rr}$ на интервале $0 < x < \frac{2r}{R-r} \sqrt{Rr}$. Вместо этой функции можно взять функцию $g(x) = x + \frac{Rr}{x}$, график которой (при $x > 0$) изображен на рисунке 7. Она убывает при $0 < x \leq \sqrt{Rr}$ и возрастает при $x \geq \sqrt{Rr}$ (докажите это). Таким образом, если $\frac{2r}{R-r} \cdot \sqrt{Rr} > \sqrt{Rr}$, то наименьшее значение длины стороны AB равно $f(\sqrt{Rr}) = 4\sqrt{Rr}$. Если же $\frac{2r}{R-r} \cdot \sqrt{Rr} \leq \sqrt{Rr}$, то функция f наименьшего значения на интервале $]0, \frac{2r}{R-r} \sqrt{Rr}[$ не имеет.

Неравенство $\frac{2r}{R-r} \sqrt{Rr} \leq \sqrt{Rr}$ эквивалентно неравенству $R \geq 3r$. Таким образом, если $r < R < 3r$, искомым минимум равен $4\sqrt{Rr}$, если же $R \geq 3r$, наименьшего значения $|AB|$ не существует: длина стороны $|AB|$ может принимать любое значение, большее $f\left(\frac{2r}{R-r} \times \sqrt{Rr}\right) = \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)} \sqrt{Rr}$, но самого этого значения не достигает.

Ю. И. Ионин.



Для простоты будем считать, что скорость спутника изменяется за очень короткий промежуток времени (малый по сравнению с периодом обращения спутника по круговой орбите). Минимальное расстояние от поверхности Земли до эллиптической орбиты равно радиусу первоначальной круговой орбиты, то есть обе орбиты спутника имеют общую точку (точка I на рисунке 8), в которой и произошло изменение скорости спутника. Найдем скорости v_0 и v_1 спутника в этой точке на круговой и на эллиптической орбитах, а затем и изменение скорости $\Delta v = v_1 - v_0$.

Вначале определим скорость v_0 спутника при движении по круговой орбите. Так как центростремительное ускорение

$$a = \frac{v_0^2}{R+h} \quad (R - \text{радиус Земли})$$

спутнику сообщает сила тяготения $F_T = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}$ (M — масса Земли, m — масса спутника), то, согласно II закону Ньютона,

$$\frac{mv_0^2}{R+h} =$$

$$= \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}. \text{ Из этого равенства непосредственно найдем.}$$

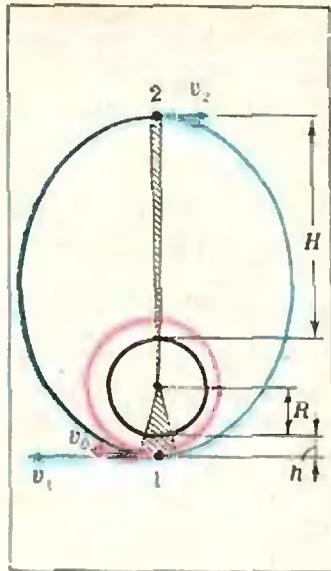


Рис. 8.

что

$$v_0 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R+h}}$$

Для того чтобы определить скорость v_1 спутника, когда он движется по эллиптической орбите на высоте h над Землей, воспользуемся законом сохранения энергии и III законом Кеплера*). Из аналогии между гравитационным и электростатическим полями можно заключить, что в тот момент, когда спутник находится на расстоянии h от Земли, он обладает потенциальной энергией $\Pi_1 = -\gamma \frac{mM}{R+h}$. Кроме того, спутник имеет кинетическую

энергию $K_1 = \frac{mv_1^2}{2}$. На высоте H от Земли спутник обладает потенциальной энергией $\Pi_2 = -\gamma \frac{mM}{R+H}$ и кинетической энергией $K_2 = \frac{mv_2^2}{2}$, где v_2 — скорость спутника на высоте H . Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R+h} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R+H}$$

По второму закону Кеплера площади, заметаемые радиус-вектором спутника за равные промежутки времени, равны. На рисунке 8 это площади заштрихованных фигур. Если промежуток времени Δt мал, скорости движения спутника вблизи точек 1 и 2 можно считать постоянными. Тогда вместо секторов можно рассматривать соответствующие равнобедренные треугольники. Запишем равенство их площадей:

$$\frac{1}{2} v_1 \Delta t (R+h) = \frac{1}{2} v_2 \Delta t (R+H)$$

Из последних двух равенств найдем

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{2R+H+h} \frac{R+H}{R+h}}$$

Тогда изменение скорости спутника

$$\Delta v = v_1 - v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R+h} \left(\sqrt{\frac{2(R+H)}{2R+H+h}} - 1 \right)} \approx 2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Теперь определим период T обращения спутника по эллиптической орбите. Согласно III закону Кеплера, отношение квадратов периодов обращения спутника равно отношению кубов больших полуосей его орбит. Поэтому

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{(2R+h+H)^3}{8(R+h)^3},$$

где $T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v_0}$ — период обращения спутника по круговой орбите радиуса $R+h$. Следовательно,

$$T = \pi(2R+H+h) \sqrt{\frac{2R+H+h}{2\gamma M}} \approx 12 \text{ ч.}$$

*) См., например, статью Е. П. Кузнецова «Космические задачи на вступительных экзаменах», «Квант», 1974, № 11.

Ф279. Цилиндр, изготовленный из нетеплопроводящего материала, разделен нетеплопроводящей перегородкой на две части, объемы которых V_1 и V_2 . В первой части находится газ при температуре T_1 под давлением p_1 . Во второй части находится такой же газ, но при температуре T_2 и под давлением p_2 . Какая температура газа установится в цилиндре, если убрать перегородку?

Так как стенки цилиндра сделаны из нетеплопроводящего материала, то, независимо от того, какой процесс происходит с газом в цилиндре при его перемешивании, из закона сохранения энергии следует

$$cm_1(T - T_1) = cm_2(T_2 - T).$$

Здесь c — удельная теплоемкость газа, m_1 и m_2 — массы газа соответственно в первой и во второй частях цилиндра и T — температура, которая установится в цилиндре после того, как наступит равновесие. Из этой формулы (уравнение теплового баланса) после несложных преобразований получим

$$T = \frac{(m_1/m_2)T_1 + T_2}{1 + m_1/m_2}.$$

Отношение $\frac{m_1}{m_2}$ нетрудно найти, воспользовавшись уравнением газового состояния. Для газа в частях цилиндра до того, как убрали перегородку, можно записать

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT_1 \text{ и } p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT_2.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1V_1T_2}{p_2V_2T_1}.$$

Тогда окончательно

$$T = \frac{T_1T_2(p_1V_1 + p_2V_2)}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1}.$$

Ф280. Источник света находится на расстоянии $3a$ от линзы с фокусным расстоянием a . Во сколько раз изменится средняя освещенность пятна на экране, который находится на расстоянии $1,5a$ от линзы, если между линзой и источником поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $0,5a$? Показатель преломления стекла равен n .

Средняя освещенность E пятна на экране зависит от светового потока Φ , проходящего через линзу и попадающего на экран, и от площади Δs пятна на экране:

$$E = \frac{\Phi}{\Delta s}.$$

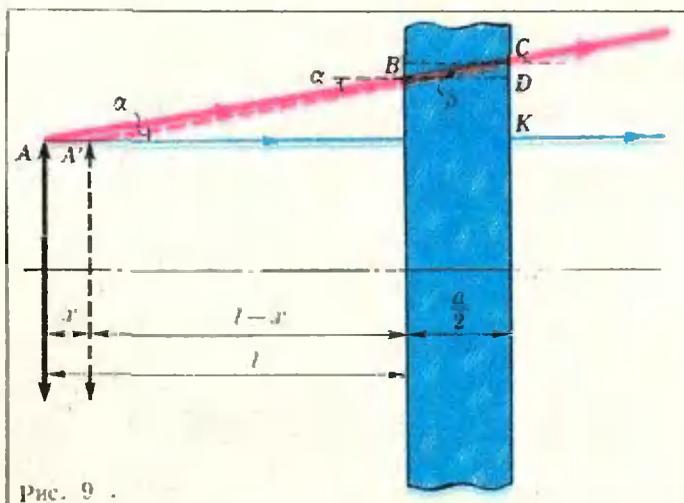


Рис. 9.

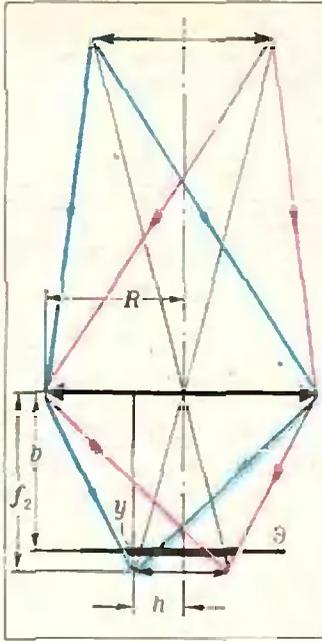


Рис. 10. Линейный размер пятна на экране отличается от линейного размера изображения на величину

$$y = (R - h) \left(1 - \frac{b}{f_2}\right).$$

где R — радиус линзы, h — размер изображения $b = 1,5a$ — расстояние от линзы до экрана, f_2 — расстояние от линзы до изображения.

Найдем отдельно освещенности в первом и во втором случаях, а потом их отношение.

В первом случае источник находится на расстоянии $d_1 = 3a$ от линзы. Из формулы линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ получим, что изображение источника находится на расстоянии $l_1 = \frac{Fd_1}{d_1 - F} = \frac{3}{2}a$ от линзы, то есть как раз на экране.

Пусть площадь источника мала и равна ΔS (размеры источника, действительно, должны быть малыми по сравнению с расстоянием от него до линзы, так как пользуясь формулой линзы, мы рассматриваем только близкие к главной оптической оси лучи). Тогда можно считать, что световой поток, излучаемый с единицы площади источника в единичном телесном угле — обозначим его I , — есть величина постоянная. Таким образом, на линзу от источника падает световой поток $\Phi_1 = I \Delta S \Omega_1$, где Ω_1 — телесный угол, в котором видна линза из точек источника. Угол Ω_1 измеряется отношением $\frac{S}{d_1^2}$ (S — площадь линзы, d_1 — расстояние от линзы до источника). Этот световой поток после линзы попадает на экран. Площадь изображения Δs_1 на экране относится к площади ΔS источника как $\frac{f_1^2}{d_1^2}$, то есть

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta S} = \frac{f_1^2}{d_1^2} = \frac{1}{4}.$$

Тогда освещенность экрана в первом случае равна

$$E_1 = \frac{\Phi_1}{\Delta s_1} = I \frac{S}{d_1^2} \frac{\Delta S}{\Delta s_1} = \frac{4}{9} \frac{IS}{a^2}.$$

После того, как между источником и линзой поместили плоскопараллельную пластинку, источником для линзы стало изображение источника, даваемое пластинкой. Найдем положение этого изображения (расстояние x на рисунке 9).

Для этого построим ход двух лучей, выходящих, например, из точки A источника. Пусть один луч перпендикулярен к пластинке, а второй луч образует с первым малый угол α . Из треугольника $A'CK$ отрезок CK равен

$$CK = A'K \operatorname{tg} \alpha = \left(l - x + \frac{a}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha.$$

С другой стороны,

$$CK = CD + KD = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta + l \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$\left(l - x + \frac{a}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta + l \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда $x = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)$. Так как углы α и β малы, то $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{n}$ и $x = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Таким образом, изображение источника, даваемое пластинкой, находится от линзы на расстоянии $d_2 = 3a - x = \frac{a}{2} \left(5 + \frac{1}{n}\right)$.

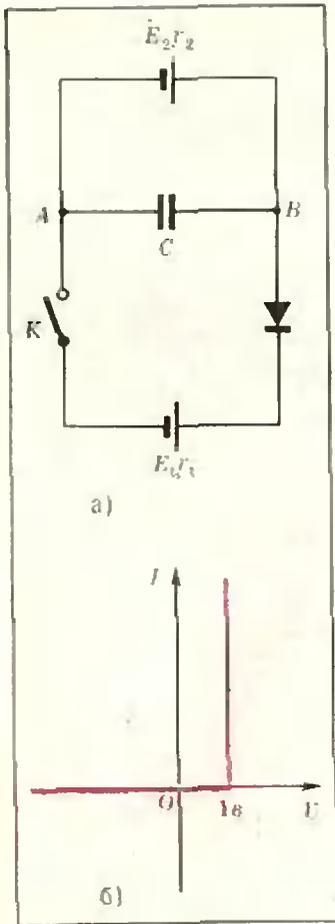


Рис. 11.

Ф281. В схеме, изображенной на рисунке 11, а, первоначально ключ \$K\$ разомкнут. Э. д. с. первой батареи \$E_1 = 1\$ в, и ее внутреннее сопротивление \$r_1 = 0,2\$ ом. Э. д. с. второй батареи \$E_2 = 3\$ в*, внутреннее сопротивление \$r_2 = 0,4\$ ом. Емкость конденсатора \$C = 10\$ мкф. На какую величину изменится заряд конденсатора при замыкании ключа, если диод имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рисунке 11, б?

* В «Кванте» № 6 за 1974 год в условии задачи Ф281 была допущена печатка.

При этом размеры изображения такие же, как и источника (см. рис. 9). Световой поток \$\Phi_2\$, падающий на линзу от этого нового источника, равен \$\Phi_2 = I \Delta S \Omega_2 = I \Delta S \frac{S}{d_2^2}\$.

Теперь из формулы линзы найдем положение изображения этого источника:

$$f_2 = \frac{F d_2}{d_2 - F} = a \frac{5n + 1}{3n + 1}.$$

Ясно, что четкое изображение находится не на экране, а на экране видно размытое пятно. Однако, так как для стекла \$n\$ лежит в пределах от 1,5 до 2, то \$f_2\$ принимает значения от 1,54 \$a\$ до 1,57 \$a\$. То есть изображение находится от экрана на расстоянии примерно 0,05 \$a\$. Это расстояние мало по сравнению с расстоянием 1,5 \$a\$ от экрана до линзы. Кроме того, размер предмета и диаметр линзы тоже малы (отметим еще раз, что мы рассматриваем только узкие приосевые лучи). Поэтому можно считать, что размеры четкого изображения не отлича-

ются от размеров пятна на экране (рис. 10) и \$\frac{\Delta s_2}{\Delta S} =

$$= \frac{f_2^2}{d_2^2} = \frac{4n^2}{(3n + 1)^2}.$$

Тогда освещенность \$E_2\$ экрана в этом случае равна

$$E_2 = \frac{\Phi_2}{\Delta s_2} = \frac{I S \Delta S}{d_2^2 \Delta s_2} = \left(\frac{3n + 1}{5n - 1} \right)^2 \frac{I S}{a^2},$$

и отношение освещенностей

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{9}{4} \left(\frac{3n + 1}{5n - 1} \right)^2.$$

Вначале разность потенциалов пластин конденсатора равна \$E_2\$, а заряд конденсатора \$q_1 = C E_2\$. После замыкания ключа по цепи пойдет ток, а разность потенциалов пластин конденсатора (разность потенциалов точек \$B\$ и \$A\$) будет равна \$U_2 = E_2 - I r_2\$, где \$I\$ — ток, идущий по цепи. Найдем этот ток.

Из вольт-амперной характеристики диода следует, что при протекании тока через диод падение напряжения на нем всегда равно \$U_d = 1\$ в. Запишем закон Ома для полной цепи:

$$E_2 - E_1 = U_d + I r_1 + I r_2.$$

Отсюда

$$I = \frac{E_2 - E_1 - U_d}{r_1 + r_2}.$$

Тогда после замыкания ключа разность потенциалов пластин конденсатора будет равна

$$U_2 = E_2 - \frac{E_2 - E_1 - U_d}{r_1 + r_2} r_2.$$

а его заряд

$$q_2 = CU_2 = CE_2 - Cr_2 \frac{E_2 - E_1 - U_{\Delta}}{r_1 + r_2}.$$

Следовательно, заряд конденсатора изменится на величину

$$\Delta q = q_2 - q_1 = -Cr_2 \frac{E_2 - E_1 - U_{\Delta}}{r_1 + r_2} = -\frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \text{ мкф.}$$

Ф282. Найти частоту «симметричных» колебаний системы, показанной на рисунке 12, а. Массы всех шаров m , коэффициенты упругости пружинок k .

Прежде всего найдем силу, действующую на каждый шарик при его смещении из положения равновесия (рис. 12, б). Обозначим начальное расстояние шарика от центра системы (точки O) x_0 , новое расстояние — x , смещение шарика от положения равновесия — Δx , начальную длину пружины — l_0 , ее длину в растянутом состоянии — l , а изменение длины пружины — Δl .

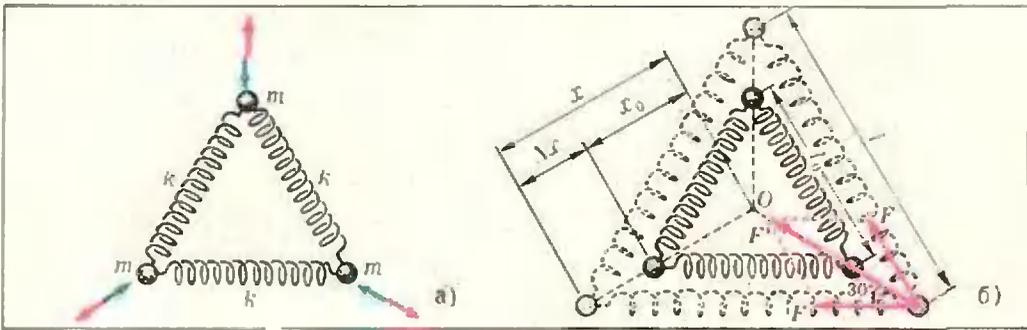


Рис. 12.

Как видно из рисунка 12, б,

$$l_0 = 2x_0 \cos 30^\circ \text{ и } l = 2x \cos 30^\circ.$$

Тогда каждая из пружин при смещении шариков окажется растянутой на величину

$$\Delta l = l - l_0 = 2(x - x_0) \cos 30^\circ = \sqrt{3} \Delta x.$$

Следовательно, на каждый шарик со стороны пружин будет действовать две равные по абсолютной величине силы: $F = k\Delta l = \sqrt{3}k\Delta x$.

Равнодействующая этих сил направлена к положению равновесия шарика и равна по абсолютной величине (см. рис. 12, б) $F' = 2F \cos 30^\circ = 3k\Delta x$, то есть пропорциональна смещению шарика от положения равновесия. Это означает, что система эквивалентна системе из трех обычных пружинных маятников, соединенных в точке O и имеющих жесткость $k' = 3k$ каждый. Поэтому частота колебаний системы будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Ф283. Заряженные шарики с одинаковой массой, расположенные на расстоянии l друг от друга, отпустили

Шарики удаляются друг от друга под действием силы F электрического отталкивания, равной (в системе единиц СГСЭ)

$$F = \frac{q^2}{r^2}, \text{ где } q \text{ — заряд каждого шарика, } r \text{ — расстояние}$$

(без начальной скорости). Через t секунд расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между шариками, если их отпустить с расстояния $3l$?

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 3$$

между шариками. Сила F , а значит, и ускорение шариков меняются по величине по мере изменения расстояния между шариками, поэтому движение шариков не будет равноускоренным. Для решения задачи придется проявить некоторую изобретательность.

Разобьем перемещения шариков в первом и во втором случаях на одинаковое число участков таких, чтобы относительные перемещения в обоих случаях были одинаковыми. Обозначим начальное расстояние между шариками $2x_0$, а в некоторый момент времени — $2x$. Величина $k = \frac{x}{x_0}$ и есть относительное перемещение шариков.

Пусть k изменилось на величину $\Delta k = \frac{\Delta x}{x_0}$. Тогда перемещение каждого шарика в первом случае (когда $2x_0 = l$) равно $\Delta x_1 = \Delta k \frac{l}{2}$, а во втором случае (когда $2x_0 = 3l$) — $\Delta x_2 = \Delta k \frac{3}{2} l$. Отношение перемещений шариков равно

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 3.$$

Теперь сравним средние скорости шариков. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. В начальный момент шарик обладает только потенциальной энергией электрического взаимодействия $\Pi_0 = \frac{q^2}{2x_0}$ (в системе СГСЭ).

В тот момент, когда расстояние между шариками равно $2x$, они обладают потенциальной энергией $\Pi = \frac{q^2}{2x}$ и кинетической энергией $K = 2 \frac{mv^2}{2}$ (m — масса шарика). По закону сохранения энергии $\frac{q^2}{2x_0} = \frac{q^2}{2x} + mv^2$. Отсюда

$$\frac{v_{\text{ср. 1}}}{v_{\text{ср. 2}}} = \sqrt{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{q^2 x - x_0}{2m x x_0}} = \sqrt{\frac{q^2}{2x_0 m} \frac{k-1}{k}}.$$

Видим, что при одном и том же относительном перемещении k скорость шарика в первом случае больше скорости шарика во втором случае в $\frac{\sqrt{q^2 m l}}{\sqrt{q^2 3m l}} = \sqrt{3}$ раз.

Ясно, что при изменении k на величину Δk средние скорости шариков будут отличаться тоже в $\sqrt{3}$ раз: $\frac{v_{\text{ср. 1}}}{v_{\text{ср. 2}}} = \sqrt{3}$.

Времена, за которые шарик перемещается на Δx_1 в первом случае и на Δx_2 во втором случае, равны соответственно

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{\text{ср. 1}}} \text{ и } \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{\text{ср. 2}}}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \frac{v_{\text{ср. 1}}}{v_{\text{ср. 2}}} = 3 \sqrt{3},$$

то есть при любом изменении величины k время движения в первом случае больше времени движения во втором случае в $3\sqrt{3}$ раза.

Следовательно, когда расстояния между шариками

$$\frac{t_2}{t_1} = 3\sqrt{3}$$

удвоится, полное время t_2 будет больше времени t_1 тоже в $3\sqrt{3}$ раза. То есть

$$t_2 = 3\sqrt{3}t_1 = 3\sqrt{3}t.$$



Ф284. Найти ускорение a , с которым падает круглая металлическая пластинка в однородном магнитном поле, параллельном поверхности Земли. Пластинка падает вертикально вниз и ориентирована своей плоскостью параллельно магнитному полю и перпендикулярно к поверхности Земли. Толщина пластинки d много меньше ее радиуса R , масса m , индукция магнитного поля B , ускорение свободного падения g .

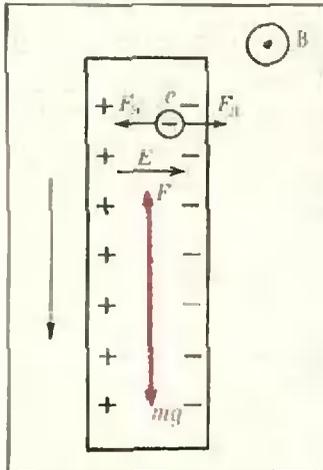


Рис. 10

Вначале рассмотрим случай, когда пластинка падает вертикально вниз с постоянной скоростью v . На электроны, падающие вместе с пластинкой, со стороны магнитного поля действует сила Лоренца (рис. 13) $F_L = evB$ (e — заряд электрона). В результате электроны будут смещаться к правой стороне пластинки. Перераспределение электронов внутри пластинки приведет к возникновению электрического поля, направленного слева направо (см. рис. 13). Смещение электронов будет происходить до тех пор, пока сила Лоренца не уравновесится силой F_E , действующей со стороны электрического поля: $F_L = F_E$, или $evB = eE$. Отсюда напряженность электрического поля $E = vB$.

Так как толщина пластинки много меньше ее радиуса, то электрическое поле внутри пластинки можно считать однородным (можно пренебречь краевыми эффектами). Это означает, что пластинку можно считать плоским конденсатором, между пластинами которого разность потенциалов $u = Ed = Bvd$, заряд которого равен

$$q = Cu = \frac{\epsilon_0 S}{d} Bvd = \epsilon_0 SBv$$

($S = \pi R^2$ — площадь пластинки).

Этот заряд зависит от скорости движения пластинки. При движении пластинки с некоторым ускорением вместе со скоростью пластинки с течением времени будут меняться и заряды на сторонах пластинки. Следовательно, при изменении скорости пластинки в ней возникает электрический ток

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \epsilon_0 SB \frac{\Delta v}{\Delta t} = \epsilon_0 SBa,$$

где a — ускорение пластинки. Но, как мы знаем, на проводник с током в магнитном поле действует сила. В нашем случае эта сила равна по абсолютной величине $F = BId$ и направлена вертикально вверх. Итак, кроме силы тяжести на пластинку при ее падении со стороны магнитного поля будет действовать еще сила F . Запишем уравнение движения пластинки:

$$ma = mg - BId, \text{ или } ma = mg - B^2 d \epsilon_0 \pi R^2.$$

Отсюда

$$a = g \frac{1}{1 + \frac{B^2 d \epsilon_0 \pi R^2}{m}}.$$

И. Ш. Слободецкий

Окончание списка Начало см «Квант»
№ 1, 1975 г

В Умурзаков (Кизил-Артас Удмуртской обл.) 63, *Ф. Шакурова* (Казань) 56, 59; *С Шаташвили* (Тбилиси) 58, 63; *Е Шефтель* (Чернигов) 58, 59; *А Шизель* (Москва) 63, 64; *Г Шмелев* (Ярославль) 56, 58, 59, 61—63, 65; *Н Шмырин* (Рез Свердловской обл.) 63; *В Шпаковский* (Пинск Брестской обл.) 56, 62, 65; *А Шульман* (Киев) 62—65; *А Шушков* (Ленинград) 63; *И. Юнус* (Харьков) 56—59, 61—65; *Б Юсин* (Москва) 56—59, 61—65; *М Яникова* (Москва) 63; *Б Яцало* (с Морочно Ровенской обл.) 64.

Правильные решения задач Ф267—Ф277 прислали следующие читатели (жирные цифры — последние две цифры номера задачи) *Х Абдуллин* (Алма-Ата) 72, *Н Агладзе* (Тбилиси) 73, 75, 77, *Д Азов* (Челябинск) 72, *Г Айзин* (Брест) 72, 77, *Р Акбаров* (Андижан) 68, 70—73, 75, 76, *С Актариев* (Магнитогорск) 68, 70—72, *А Александрин* (Валуйки) 67, 68, 70, *А Алексеев* (Смоленск) 72, *Я Аннамуратов* (Байрам-Али) 72, *М Аронов* (Володарск) 68, 70, 71, *Ш Атабаев* (п/о Найман Хорезмской обл.) 68, *И Бабакулов* (Катта-Курган Самаркандской обл.) 75, *Р Бабчанник* (п Маном-65 км Хабаровского кр.) 68, *В Бакуров* (Новосибирск) 67, *С Балашиов* (Москва) 75, 77, *Р Басыров* (д Н Каракитяны ТАССР) 67, 68, 70, 73, 76, *Г Бежишвили* (Рустави) 73, 75, *В Белоусов* (Москва) 67, *Ю Бельский* (Брест) 71, 72, *З Бендукидзе* (Тбилиси) 70, *В Бенхан* (Каалини) 70, 75, *У Беджиев* (Карачаевск) 67, 68, 70—72, *М Бирман* (Саратов) 68, 70, *М Биктимиров* (Ленинск) 73, 77, *Ю Богомолов* (Казань) 68, 70, 72—74, 77, *С Бодров* (Реутов) 67, 68, 71, 72, *В Борисов* (Воронеж) 68, 73, *В Борю* (Запорожье) 68—71, 73, 75, *С Бостанова* (Карачаевск) 67, 68, 70—72, *С Бурин* (Боровск) 72, *А Вакуленко* (Москва) 68, 70, 71, *В Виноградов* (Владивосток) 68, *И Винокуров* (Москва) 68, 71, *И Винаяр* (Оргеев) 68, *А Волков* (Челябинск) 72, 73, *В Воляков* (п Залегощ Орловской обл.) 67, *И Воронин* (Днепропетровск) 73, *В Галунов* (Фрунзе) 68, *И Галинников* (Волгоград) 68, 71—73, 75, *В Гасилов* (Ярославль) 68, 70, *М Гадалин* (Тбилиси) 67, 75, 77, *С Герц* (Хуст) 68, 72, *Б Гобермин* (Баку) 70, *А Говяда* (Киев) 67, *И Голдобский* (Брянск) 68, 71, 73—75, 77, *Э Голуб* (Пинск) 68, 71—73, *А Гончаров* (Воронеж) 73—75, *Е Горбатый* (Одесса) 68, 70, 72, 74—77, *А Гордин* (п Урень Горьковской обл.) 75, 77, *С Горшин* (Таганрог) 68, 70, 73—75, *А Григорьев* (Грозный) 73, *С Григорьев* (Ессентуки) 68, 73, *С Гродский* (Корсунь-Шевченковский) 73, *В Грязев* (Кокчетав) 68, 72, *Е Губанов* (п Востряково Московской обл.) 70, 72, *Е Гугель* (Днепропетровск) 68, *О Гудкова* (Одесса) 72, *М Гумиян* (Ер-ван) 76,

Г Демиков (Усмань) 68, 73, *У Джумания-ю* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 68, *Ю Докучаев* (Ленинград) 67—76, *В Дорохов* (Донецк) 67, *А Дробинин* (Евпатория) 68, 70, 71, 75—77, *И Дубровский* (Омск) 69, 70, *В Жук* (Грозный) 70, *Е Жуков* (Волгодонское Целиноградской обл.) 68, 72, *И Заверткин* (Орск) 70, 72, 75, 76, *П Золотарев* (Ташкент) 67, 73, 75—77, *В Зосимов* (Элиста) 71, 72, 74, 75, *Ф Ибрагимов* (Кривой Рог) 72, *В Иващук* (Киев) 67, 68, 70—75, 77, *Т Иванова* (Москва) 68, *А Ивлиев* (Москва) 67, 68, 70, *А Измаилов* (Баку) 68, 70—72, *А Имертшили* (Тбилиси) 72, *Н Иранов* (Баку) 68, *И Иовик* (Магнитогорск) 68, 70, 73, 75, *А Казирова* (Ереван) 76, *А Карнаух* (Белгород) 68, 70, 72, 73—75, *А Капивец* (Карпинск) 68, *В Карпухов* (Челябинск) 73, 75, 76, *А Карякин* (Сарань) 73, *Б Кацман* (Мытищи) 67, 70, 72, 73, *Г Камикадзе* (Тбилиси) 68, 72, *А Керенцов* (Бугульма ТАССР) 72, *Л Клименко* (Москва) 73, *А Ключко* (Жуковский) 68, 70, 71, 73, 75, 76, *Н Кобылецкий* (Баку) 71, *А Коган* (Воронеж) 75, *Я Коган* (Глазов) 68, 71—74, 77, *Р Козак* (Винница) 68, 70, 71, 73, 75, *С Колобзарова* (Вольск) 68, *А Колост* (Воронеж) 68, 70, *А Колочкин* (Симферополь) 68, 71, *С Коляда* (Киев) 68, 75, *В Комаров* (Ачинск) 72, *А Копков* (Новочеркасск) 73, 76, 77, *С Копыловский* (п Знабель-Новгородское Сумской обл.) 67, 68, 70—75, 77, *Г Коробль* (Львов) 77, *И Кореишкин* (п Остер Смоленской обл.) 71, *М Кроль* (Павлово) 73, 74, *А Крохин* (Харьков) 73, 75, 77, *А Кузнецов* (Калуга) 68, 72, *В Куликовский* (Москва) 68, 70—74, *В Куценко* (Камышин Волгоградской обл.) 76, *И Лазурчак* (Трускавец) 68, *В Лалекин* (Гагарин Смоленской обл.) 68, 70—72, *В Левитас* (Киев) 72, 77, *А Лелчинов* (Шахты) 73, 75, *Ю Листов* (Казань) 68—70, 72, *А Лопатенко* (Днепропетровск) 73, 75, 77, *С Ляпин* (Петриков) 67, 73, *С Магомедов* (с Кубра ДагАССР) 70, *И Майхруль* (с Белобожница Тернопольской обл.) 70, 71, 73, 75, 77; *В Малов* (Ташкент) 77, *В Мамед-Заде* (Баку) 68, *С Матвеев* (Москва) 68—70, 72, 73, 75, 77, *Г Мац* (Новосибирск) 76, *В Мелехов* (Кирово-Чепецкий Кировоградской обл.) 68, *С Мельник* (Харьков) 68, 70—77, *А Менжилий* (ст Старомлинская Краснодарского кр.) 68, *А Морозов* (Новосибирск) 75, 77, *А Морозовский* (Киев) 72, 77, *А Набатчиков* (Курск) 70, 73, *В Назарулов* (Стерлитамак) 75, *К Николаев* (Алма-Ата) 68, *Г Оганнисян* (с В Арташат АрмССР) 75, 77, *А Ожак* (Ворошиловград) 75, *Ю Онищенко* (Люберцы) 68, 69, 71—75, 77, *С Онуцин* (Пермь) 73, 75, *А Осин* (Камышин Болгоградской обл.) 68, 69, 71, 73, *В Осипенко* (п Знабель-Новгородское Сумской обл.) 68, 73, 75, *С Остапенко* (с Пуштулим Алтайского кр.) 70; *А Остапов* (Орджоникидзе) 72, *С Островская* (Харьков) 68, 70, 72, 73, *Е Павленко* (Армавир) 68, 73, 77, *С Паителаймонов* (Хуст) 70, 73, *А Паро-*

вичников (Обнинск) 68; В. Пахомов (Днепропетровск) 73; Ю. Перфильев (Саратов) 70, 72; В. Пестунов (Кировоград) 75; Н. Пишторак (с. Соколовка Винницкой обл.) 68; А. Поблагуев (Винница) 67, 68, 70—72, 74, 75, 77; М. Половинник (Мена) 67, 71, 74; Р. Портной (Черновцы) 68; А. Пресман (Москва) 75; Б. Рахманов (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 68; С. Рашкеев (Солнечногорск) 73—75, 77; Б. Рева (Таллин) 68, 70, 71, 73, 75; В. Решетняк (Киев) 68, 70; В. Решетов (Куйбышев) 67; Э. Розенкранц (Магнитогорск) 73, 76; М. Розман (Псков) 74, 75, 77; В. Рыжиков (Ахтубинск) 67, 70—73, 75; И. Сапрыкин (Фрунзе) 68; В. Свиридов (ВНИИСС Рамонского р-на Воронежской обл.) 67; Р. Сергеев (д. Перебродье Витебской обл.) 68, 70—73, 75; Р. Сирота (Харьков) 68, 71, 73, 75, 76; В. Смоленков (Ленинград) 68; Ю. Смоленцев (Ессентуки) 68, 70, 71; В. Смолко (Кишинев) 68; А. Смык (Красноярск) 68, 70, 75; И. Соколов (Москва) 73, 75, 77; В. Солдатов (Ногинск) 73, 75; С. Сорокин (Грозный) 73; П. Субботин (с. Городище Белгородской обл.) 72, 77; Л. Сургуладзе (Тбилиси) 74, 75; В. Тарасов (Ленинград) 76; В. Татаренко (Киев) 73; В. Татарин (Теребовля) 75, 76; Л. Требулева (Ташкент) 67, 68, 71, 73, 75, 76; А. Туровский (Псков) 73—75, 77; М. Тяпин (п/о Мекса Волгоградской обл.) 76; А. Уваров (с. Знаменка Пензенской обл.) 75; Б. Умурзаков (Коспеленский р-н Алма-Атинской обл.) 73; С. Утнакулов (Элиста) 67, 68, 70, 72; Н. Федин (Омск) 67, 68, 70—77; П. Фоменко (Днепропетровск) 67, 68, 70—72; А. Хомич (Брест) 77; Л. Цимринг (Горький) 73, 76, 77; И. Цифра (с. Велятино Закарпатской обл.) 68; М. Чанкаев (аул Каменномост Карачаевского р-на) 73, 75, 77; Ю. Черныш (Минск) 67—69, 71—73, 75, 77; А. Шакиров (с. Б-Ока БашкАССР) 68, 71; Г. Шмелев (Ярославль) 68, 70, 73; А. Шмулевич (Винница) 75, 77; Н. Шмырин (Реж) 67, 68, 73; Е. Юдин (Ессентуки) 68, 73, 77; А. Юнусов (Кишинев) 68.

Вычислительная машина Джона Непера

Джона Непера, барона Мерчистона (1560—1617), уроженца Шотландии, изобретателя логарифмов и одного из изобретателей десятичных дробей (он ввел знак, разделяющий целую и дробную часть) по справедливости считают первым из выдающихся английских математиков.

Эти изобретения стали частью общей человеческой культуры. И десятичными дробями, и логарифмами должен в настоящее время владеть каждый культурный человек.

Но Джон Непер позаботился также и о своих современниках, которые плохо умели умножать и делить многозначные числа. В год своей кончины он издал книгу, которая называлась «Rabdologia». В этой книге изложен остроумный способ механического умножения и деления с помощью «костяных дощечек» Непера. Вы сами сможете изготовить такие дощечки из фанеры или плотного картона (см. рис.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	9	8	7	6	5	4	3	2
2	9	0	9	8	7	6	5	4	3
3	8	9	0	9	8	7	6	5	4
4	7	8	9	0	9	8	7	6	5
5	6	7	8	9	0	9	8	7	6
6	5	6	7	8	9	0	9	8	7
7	4	5	6	7	8	9	0	9	8
8	3	4	5	6	7	8	9	0	9
9	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Хорошо вам известная таблица умножения Пифагора записана на девяти дощечках. Каждый из квадратов таблицы разделен диагонально на «верхний» и «нижний» треугольники. В нижнем — число единиц произведения, в верхнем — число десятков.

(Окончание см. с. 56)



ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Когда помогают графики

Е. Б. Ваховский, А. А. Рыжкин

Казалось бы, нет более знакомого абитуриентам материала, чем вопросы, относящиеся к исследованию квадратного трехчлена. Ни один экзаменатор не сомневается в том, что каждый поступающий в вуз без труда решит квадратное уравнение, помнит теорему Виета и справится с квадратным неравенством. И, тем не менее, практика приемных экзаменов вновь и вновь обращается к этой теме, а экзаменуемые не всегда добиваются успеха. Их нередко подводит стремление использовать сведения, лежащие на поверхности, и с их помощью как можно быстрее перевести задачу на формальный язык. Однако такой путь решения, далеко не всегда является оптимальным.

Часто большую помощь оказывает графическое представление условий задачи. Оно дает возможность взглянуть на все условия в совокупности и отыскать наиболее простой способ решения.

Покажем это на примерах.

Задача 1. При каких действительных значениях a корни x_1 и x_2 уравнения

$$x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$$

лежат между корнями x'_1 и x'_2 уравнения

$$x^2 - 2(a+1)x + a(a-1) = 0?$$

Требуется найти все такие a , что соответствующие им значения x_1, x_2, x'_1 и x'_2 удовлетворяют цепочке неравенств

$$x'_1 < x_1 \leq x_2 < x'_2.$$

Начать естественно с попытки решить данные уравнения и переписать эквивалентную задачу цепочку неравенств для неизвестного параметра a .

Корни первого уравнения $x_{1,2} = \frac{1 \pm a}{2}$, корни второго: $x'_{1,2} = a \pm 1 = \sqrt{3a+1}$.

Поскольку не ясно, какое из чисел $1-a$ или $1+a$ больше, придется рассмотреть два случая. Если $1-a \leq 1+a$, то задача сводится к системе: $x'_1 < 1-a$, $x'_2 > 1+a$. Если же $1-a < 1+a$, то получим другую систему: $x'_1 < 1+a$, $x'_2 > 1-a$.

Итак, предстоит решить совокупность двух систем иррациональных неравенств. Прodelайте это самостоятельно и сопоставьте с другим решением задачи, которое мы сейчас приведем.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ соответственно левые части первого и второго уравнений. Графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параболы, обращенные ветвями вверх. Обозначим через x_1 и x_2 корни уравнения $f(x) = 0$, а через x'_1 и x'_2 — корни уравнения $g(x) = 0$. Для всех $x \in (x'_1, x'_2)$ будет $g(x) < 0$. Если $x'_1 < x_1 < x_2 < x'_2$, то $g(x_1) < 0$ и $g(x_2) < 0$. Верно и обратное: если $g(x_1) < 0$ и $g(x_2) < 0$, то $x'_1 < x_1 < x_2 < x'_2$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$g(x_1) < 0,$$

$$g(x_2) < 0.$$

Подставив $x_{1,2} = 1 \pm a$ в $g(x)$, получим систему

$$\begin{cases} (1-a)^2 - 2(a+1)(1-a) + a(a-1) < 0, \\ (1+a)^2 - 2(a+1)(1+a) + a(a-1) < 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем $-\frac{1}{4} < a < 1$.

Следует отметить, что такое преобразование задачи целесообразно, если выражения для x_1 и x_2 достаточно просты.

Однако обращение к графикам не всегда проходит так гладко и легко, как в разобранным только что примере.

Вот еще один пример.

Задача 2 (МАИ, 1970). При каких действительных значениях параметра m корни уравнения

$$(1+m)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

подчиняются условию $2 < x < 5$?

Перескажем здесь решение задачи, предложенное одним абитуриентом. График квадратного трехчлена может быть обращен ветвями вверх или ветвями вниз, в зависимости от знака коэффициента при x^2 . И в том, и в другом случае значения квадратного трехчлена $f(2)$ и $f(5)$ будут одного знака, то есть $f(2) \cdot f(5) > 0$. Однако корни x_1 и x_2 могут быть расположены либо оба левее 2, либо оба правее 5. И в том, и в другом случае $f(2) \cdot f(5)$ будет больше нуля, но абсцисса вершины параболы x_0 окажется вне отрезка [2,5]. Поэтому потребуем, чтобы она была внутри этого отрезка. Остается записать, что данное уравнение имеет действительные корни, и свести решение задачи к решению системы неравенств

$$\begin{cases} f(2) \cdot f(5) > 0, \\ 2 < x_0 < 5, \\ D \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Приведенные рассуждения не лишены оснований, но, к сожалению, говорят о недостаточной аккуратности. Замену первоначальной задачи системой (1) нельзя признать обоснованной. Для произвольного квадратного трехчлена $f(x)$ она просто не верна (см. рис. 1). А ведь кроме этого может случиться, что коэффициент при x^2 обратится в нуль, и тогда графиком функции будет прямая.

Чтобы получить аккуратное решение задачи, нужно найти способ, обеспечивающий исчерпание всех возможных ситуаций. С этой целью удобно начать с коэффициента при x^2 . Он может быть либо отрицательным, либо равным нулю, либо положительным.

Когда $1+m = 0$, то есть $m = -1$, уравнение принимает вид $3x - 4 = 0$. Его корень $x = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию задачи, он не лежит между 2 и 5.

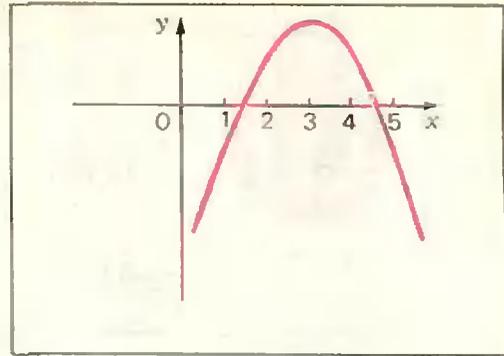


Рис. 1.

Если $1+m \neq 0$, то левая часть уравнения — квадратный трехчлен, а его график — парабола. Так как у трехчлена должны быть действительные корни, то $D \geq 0$, то есть $9m^2 - 16m(m+1) \geq 0$. Отсюда $0 \geq m \geq -\frac{16}{7}$.

Теперь воспользуемся тем, что абсцисса вершины параболы должна лежать между ее корнями, то есть

$$2 < \frac{3m}{2(m+1)} < 5.$$

Мы уже обнаружили, что $m < 0$, а потому величина $\frac{3m}{2(m+1)}$ будет положительной лишь при $m+1 < 0$. Таким образом, случай, когда ветви параболы обращены вверх, рассматривать не нужно. Решим полученное неравенство и найдем, что

$$-\frac{1}{4} < m < -\frac{10}{7}.$$

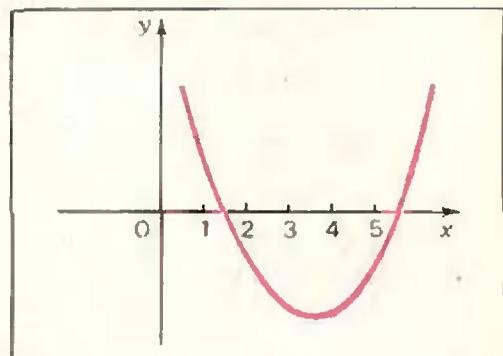


Рис. 2.

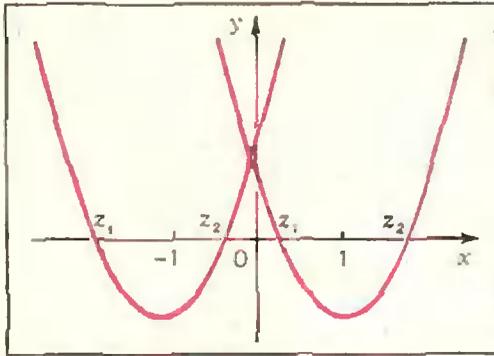


Рис. 3.

Сопоставив его с первым ограничением на m , получим $-16/7 \leq m < -10/7$. График нашей параболы при таких значениях m изображен на рисунке 2. Ее ветви направлены вниз, а корни будут лежать в интервале $(2, 5)$ тогда и только тогда, когда $f(2) < 0$ и $f(5) < 0$, то есть

$$4 + 2m < 0, \quad 25 + 14m < 0.$$

Отсюда $m < -2$. Окончательно $-16/7 \leq m < -2$.

Задача 3 (МАИ, 1970). При каких действительных значениях k одно из действительных решений системы

$$\begin{cases} x + y = 2(k + 1), & (2) \\ xy = k^2 + 3k - 1 & (3) \end{cases}$$

$$\text{удовлетворяет условию } |x| < 1, |y| > 1?$$

Наряду с системой (2), (3) естественно рассмотреть соответствующее ей квадратное уравнение

$$z^2 - 2(k + 1)z + k^2 + 3k - 1 = 0. \quad (4)$$

Оно тесно связано с данной системой, решения которой получаются с помощью корней z_1 и z_2 уравнения (4): $(z_1, z_2), (z_2, z_1)$.

Легко переформулировать задачу для уравнения (4): при каких действительных k один из действительных корней уравнения (4) находится в интервале $(-1, 1)$, а другой корень расположен вне этого интервала.

Так как у квадратного трехчлена (4) должны существовать два различных действительных корня, то $D > 0$, и график левой части уравне-

ния (4) — парабола, пересекающая ось z в двух различных точках z_1 и z_2 ($z_1 < z_2$).

Условию задачи удовлетворяет только такое расположение корней квадратного трехчлена, когда один из них лежит внутри интервала $(-1, 1)$, а другой вне этого интервала (рис. 3). Если перевести это на формальный язык, то получим такие системы:

$$\begin{cases} z_1 < -1, & \begin{cases} -1 < z_1 < 1, \\ -1 < z_2 < 1; & \begin{cases} z_2 > 1. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

Чисто технические трудности, возникающие при их решении, неоправдано велики. Изучение же геометрической картины может подсказать нам менее громоздкий прием. Нетрудно заметить, что парабола расположена одним из тех способов, которые изображены на рисунке 3, тогда и только тогда, когда значения многочлена $f(z)$, стоящего в левой части (4), в точках -1 и 1 имеют разные знаки, то есть

$$f(-1)f(1) < 0. \quad (6)$$

В самом деле, пусть значение k удовлетворяет условию задачи. Тогда уравнение (4) имеет два действительных корня. Если один из корней совпадает с -1 или 1 , то левая часть неравенства (6) обращается в нуль. Исключим эти варианты из дальнейшего рассмотрения.

Составим теперь таблицу знаков значений $f(-1)f(1)$ для возможных случаев расположения z_1 и z_2 относительно интервала $(-1, 1)$ ($z_1 < z_2$)

	$z_2 < -1$	$-1 < z_2 < 1$	$z_2 > 1$
$z_1 < -1$	$(+)(+) = +$	$(-)(+) = -$	$(-)(-) = +$
$-1 < z_1 < 1$	$-$	$(+)(+) = +$	$(+)(-) = -$
$z_1 > 1$	$-$	$-$	$(+)(+) = +$

Поскольку исчерпаны все возможные варианты, то одновременно установлена необходимость и достаточность условия (6). Остается решить

неравенство

$$(k^2 + 5k + 2)(k^2 + k - 2) < 0,$$

или

$$\left(k + \frac{\sqrt{17} + 5}{2}\right) \left(k + \frac{\sqrt{17} - 5}{2}\right) \times (k + 2)(k - 1) < 0.$$

Ответ:

$$-\frac{\sqrt{17} + 5}{2} < k < -2,$$

$$\frac{\sqrt{17} - 5}{2} < k < 1.$$

Задача 4 (МГУ, мехмат, 1971). Найдите все значения α , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leq 0, & (7) \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leq 0 & (8) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Неравенства (7) и (8) могут иметь решения лишь в том случае, когда дискриминанты D_1 и D_2 их левых частей неотрицательны.

Начнем со случая $D_1 = 0$, то есть $\alpha = 1$. Неравенство (7) принимает тогда вид $(x+1)^2 \leq 0$ и имеет единственное решение $x = -1$. При найденных значениях x и α неравенство (8) удовлетворяется. Следовательно, $\alpha_1 = 1$ — одно из искоемых значений α .

Пусть теперь $D_2 = 0$, то есть $\alpha = -\frac{2}{3}$. Единственным решением неравенства (8) при $\alpha = -\frac{2}{3}$ будет $x = 2$; неравенство (7) при этих α и x не удовлетворяется.

Теперь можно предположить, что $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$. Чтобы данная система имела единственное решение, необходимо и достаточно наличие у интервалов $[x_1, x_2]$ и $[x'_1, x'_2]$ решений неравенств (7) и (8) единственной общей точки. Это может произойти либо при $x_2 = x'_1$, либо при $x_2 = x'_1$.

График левой части (7) — парабола с абсциссой вершины $x_0 = -1$, а график левой части (8) — парабола с абсциссой вершины $x_0 = 2$.

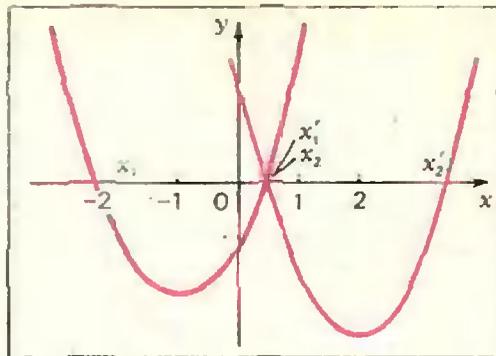


Рис. 4.

Поэтому, если α удовлетворяет условиям задачи, то параболы расположены именно так, как показано на рисунке 4. Следовательно, остается единственная возможность $x_2 = x'_1$, то есть $-1 + \sqrt{1 - \alpha} = 2 - \sqrt{4 + 6\alpha}$. Решая это иррациональное уравнение, найдем единственный его корень $\alpha = 0$ (значение $\alpha = \frac{48}{49}$, которое тоже возникает в процессе решения — посторонний корень). Итак, $\alpha = 0$.

Ответ: 0; 1.

Задача 5 (НГУ, мехмат, 1968). Для каждого действительного a среди всех точек плоскости, координаты которых x, y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - 2x \geq 0, \\ -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 - y \geq 0, \end{cases}$$

найти точки с наибольшей ординатой y .

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} y \geq f(x), & (9) \\ y \leq \varphi(x), & (10) \end{cases}$$

где $f(x) = 2x$, а $\varphi(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$. График кривой $y = \varphi(x)$ — парабола, обращенная ветвями вниз, а все точки, удовлетворяющие неравенству (10), находятся не выше этой параболы. Поскольку при каждом a нас интересует решение системы, имеющее наибольшую ординату, неравенство (10) можно заменить уравнением $y = \varphi(x)$.

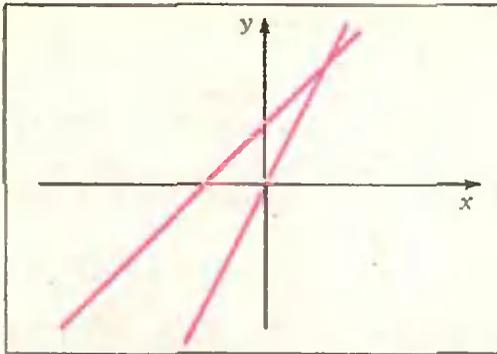


Рис. 5.

График $y = f(x)$ — прямая, проходящая через начало координат, и все точки плоскости, удовлетворяющие неравенству (9), лежат не ниже этой прямой. Таким образом, для каждого a должна быть найдена точка параболы $y = \varphi(x)$, лежащая не ниже прямой $y = 2x$ и имеющая наибольшую ординату. Возможны два случая взаимного расположения параболы и прямой: либо вершина параболы лежит не ниже прямой $y = 2x$, либо она находится под этой прямой (см. рис. 5). В первом случае решением задачи будет точка (x_0, y_0) , являющаяся вершиной параболы, во втором — точка (x_1, y_1) , координаты которой удовлетворяют одновременно уравнениям прямой и параболы. Уравнение параболы позволяет легко найти координаты ее вершины: $x = a$, $y = a + 1$. Мы видим, что все вершины параболы $y = \varphi(x)$ при

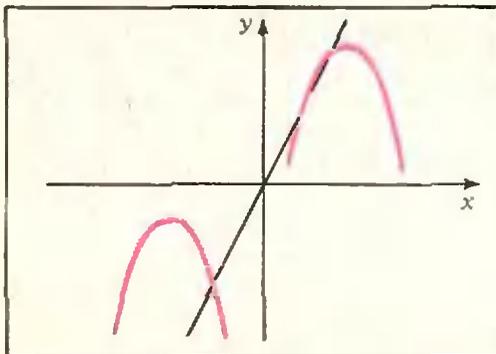


Рис. 6.

различных значениях параметра a лежат на прямой $y = x + 1$, и, обратно, каждой точке (x_0, y_0) прямой $y = x + 1$ соответствует парабола $y = \varphi(x)$, имеющая в ней свою вершину — достаточно взять $a = x_0$. Нанесем прямые $y = x + 1$ и $y = 2x$ на один график (рис. 6). Пересечением этих двух прямых является точка $(1, 2)$. При $a \leq 1$ прямая $y = x + 1$ будет располагаться над прямой $y = 2x$ и решением задачи будет точка $(a, a + 1)$. Если же $a > 1$, то решением является точка (x, y) , удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} y - 2x = 0, \\ -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 - y = 0; \end{cases}$$

отсюда

$$y = 2x \text{ и } x^2 - 2(a-1)x + a^2 - a - 1 = 0.$$

Уравнение имеет два действительных корня, когда $D = 2 - a \geq 0$, то есть $a \leq 2$. Из них условию задачи удовлетворяет больший:

$$x_2 = a - 1 + \sqrt{2 - a}.$$

Ответ: при $a \leq 1$, $x = a$, $y = a + 1$,

при

$$1 \leq a \leq 2, \quad x = a - 1 + \sqrt{2 - a},$$

$$y = 2(a - 1) + 2\sqrt{a - 1},$$

при $a > 2$ решений нет.

Однако не всегда «формальное» решение оказывается более трудоемким. Иногда оно более целесообразно, чем графическое.

Задача 6 (МАИ, 1971). При каких действительных значениях t неравенство

$$x^2 - 2tx + 2|x - t| + 2 < 0$$

имеет по крайней мере одно решение?

Преобразуем данное неравенство к виду

$$(x - t)^2 + 2|x - t| + 2 - t^2 < 0,$$

или

$$\begin{cases} y^2 + 2y + 2 - t^2 < 0, & (11) \\ y \geq 0, & (12) \end{cases}$$

где $y = |x - m|$. Система (11), (12) имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда дискриминант левой части (9) неотрицателен, а больший корень y_2 не лежит левее нуля:

$$\begin{cases} m^2 - 1 \geq 0, \\ -1 + \sqrt{m^2 - 1} \geq 0, \end{cases}$$

то есть $\begin{cases} m^2 \geq 1, \\ m^2 \geq 2. \end{cases}$

Ответ: $m \leq -\sqrt{2}$, $m \geq \sqrt{2}$.

Итак, мы видим, что в ряде задач удобно привлечь на помощь графическое представление квадратного трехчлена. Такой подход может оказаться полезным и для других зависимостей; он помогает обнаружить более простой и более содержательный путь решения. Однако все рассуждения относительно графиков могут стать частью решения только в том случае, когда они проведены в самом общем виде. В задачах с параметрами следует особенно внимательно отнестись к виду зависимости, поскольку при некоторых значениях параметров вид графика может существенно измениться (в примере 2 мы видели, что при $m = -1$ графиком квадратного трехчлена будет не парабола, а прямая). Использование графиков при решении задачи не является самоцелью, что наглядно подтверждается последним примером. Нужно, прежде всего, тщательно проанализировать все особенности конкретной задачи, подумать о наиболее рациональном использовании ее условий — это поможет вам найти наиболее удачное решение.

Упражнения

1. (МАИ, 1970). При каких действительных значениях a числа 1 и a заключены между числами x_1 и y_1 , где (x_1, y_1) — решение системы

$$\begin{cases} x + y - 1 = 2a, \\ 2xy = a^2 - a. \end{cases}$$

2. (МАИ, 1970). Найти все действительные значения m , при которых корни уравнения

$$x^2 - 2(m-1)x + 2m + 1 = 0$$

будут разных знаков и каждый по модулю меньше четырех.

3. (МАИ, 1970). Найти все действительные значения m , при которых корни уравнения

$$(m-1) \log_3^2(x-2) -$$

$-2(m+1) \log_3(x-2) + m - 3 = 0$ меньше трех.

4. (МГУ, мехмат, 1971). Найти все значения α , при которых решения системы

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + \alpha \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leq 4\alpha. \end{cases}$$

образуют замкнутый интервал (отрезок) длины, равной единице.

5. (МГУ, эконом, кибернетика, 1971). Найти минимальный член последовательности

$$a_n = 2n^2 - 24n + 69 - \frac{9}{(3n-22)^2 + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

6. (МГУ, физфак, 1964). Найти все действительные значения m , для которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ удовлетворяется при всех положительных значениях x .

7. (МАИ, 1971). Найти все действительные значения a , при которых для всех положительных значений $x > -2$ удовлетворяется неравенство

$$\frac{ax - a - \frac{1}{4}}{ax - 1} < 0.$$

8. (МГУ, филфак, 1968). Найти все те значения параметра a , при которых оба корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + 2$ действительны и находятся между 0 и 3 (исключая крайние значения).

9. (МГУ, физфак, 1965). Найти все значения a , при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .

10. (МГУ, мехмат, 1966). Найти все значения a , для которых при всех x , не превосходящих по модулю единицы, справедливо неравенство $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$.

Московский физико-технический институт

Подробно о Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте было рассказано в «Кванте» № 10 1973 года. Ниже приводятся некоторые билеты вступительных письменных экзаменов в МФТИ по математике и физике в 1974 году.

Математика

В а р и а н т 1

1. Решить уравнение

$$\log_3(\log_2 x - 9) = 2 + \log_3(1 - 4 \log_x 4).$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8 \sin x \cdot \sin 3x.$$

3. Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$) описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M . Отрезок AM пересекает окружность в точке N . Определить отношение $\frac{AD}{BC}$, если $\frac{AN}{NM} = k$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{x+1} \cos y + 5^{1-x} \cdot \sin y + 2 = \\ = 5^{x+1} \cdot \sin y - 5^{1-x} \cdot \cos y, \\ 5^{x+1} \sin y - 2 \cdot 5^{1-x} \cdot \cos y + 4 = \\ = 5^{1-x} \cdot \sin y + 2 \cdot 5^{1-x} \cdot \cos y. \end{cases}$$

5. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 8$ дм и $BC = 6$ дм. Гипотенуза AC является диаметром основания прямого кругового конуса, вершина которого расположена на ребре A_1B_1 . Боковая поверхность конуса пересекает ребро AB в точке M так, что $AM = 5$ дм. Определить объем конуса.

В а р и а н т 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[6]{x} + \sqrt{x} = 2.$$

2. Сумма членов и разность арифметической прогрессии положительны. Если уве-

личить разность прогрессии на 2, не меняя ее первого члена, то сумма ее членов увеличится в 3 раза. Если же разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза, не меняя первого члена, то сумма членов прогрессии увеличится в 5 раз. Определить разность исходной прогрессии.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a , точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5a}{6}$. Определить высоту призмы.

4. В треугольнике ABC перпендикуляр к стороне AB , проходящий через ее середину, пересекает прямую AC в точке M , а перпендикуляр к стороне AC , проходящий через ее середину, пересекает прямую AB в точке N . Известно, что $MN = BC$ и прямая MN перпендикулярна к прямой BC . Определить углы треугольника ABC .

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\sin z}{\cos x \cdot \cos y} + 3, \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = \frac{\sin x}{\cos y \cdot \cos z} - 5, \\ \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sin y}{\cos z \cdot \cos x} - 3. \end{cases}$$

В а р и а н т 3

1. Решить уравнение

$$4 \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin x \cdot \cos 2x = 0.$$

2. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает ее в точках A и B . Касательная к первой окружности, проходящая через точку A , делит вторую окружность в отношении $m:n$ ($m < n$). В каком отношении вторая окружность делит первую?

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 2 \cdot 6^{x-y} - 6^{-2y} = 0, \\ 2^{-x-y} - 2 \cdot 3^{x+y} + 3 \cdot 9^x = 0. \end{cases}$$

4. Вдоль дороги последовательно расположены пункты A, B, C . Четыре пешехода выходят одновременно: первый и второй из A в C , третий из B в C , четвертый из C в A . Второй пешеход обогнал третьего в том же месте дороги, где встретились первый и четвертый пешеходы; первый пешеход обогнал третьего в том же месте, где встретились второй и четвертый пешеходы. Третий пешеход шел в n раз медленнее четвертого, первый и второй шли с разными скоростями. Определить отношение расстояния от A до B к расстоянию от B до C (скорости пешеходов постоянны).

5. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ служит трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$

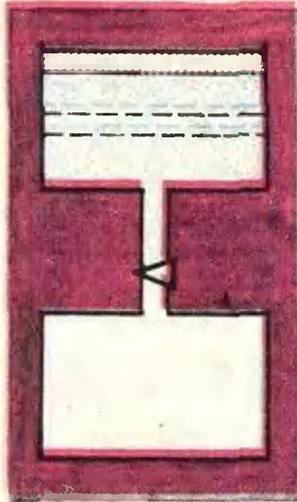


Рис. 1.

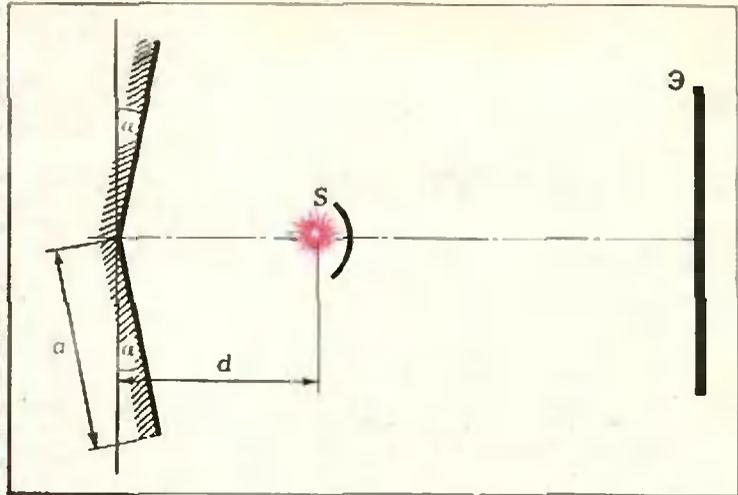


Рис. 2.

и $CD : AB = n < 1$. Диагональ AC_1 пересекает диагонали A_1C и D_1B соответственно в точках M и N , а диагональ DB_1 пересекает диагонали A_1C и D_1B соответственно в точках Q и P . Известно, что $MNPQ$ — правильный тетраэдр. Определить отношение объема тетраэдра к объему призмы.

Физика

Б и л е т 1

1. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты H по гладкой доске, наклоненной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный пол. Коэффициент трения мешка о пол $k = 0,7$.

Где остановится мешок?

2. Цилиндр, закрытый сверху подвижным поршнем, соединен короткой тонкой трубкой с откачанным сосудом (рис. 1). При закрытом кране под поршень вводится некоторое количество газа. Объем, занимаемый этим газом в цилиндре, равен объему нижнего сосуда. Какая часть газа останется в цилиндре после того, как кран открыли?

Температура газа в цилиндре поддерживается равной -173°C , а в сосуде $+127^\circ\text{C}$.

3. С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией B , наблюдают упругое рассеяние α -частиц на ядрах дейтерия. Найти начальную энергию α -частицы, если радиусы кривизны начальных участков траекторий ядра отдачи и рассеянной α -частицы оказались одинаковыми и равными r . Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции магнитного поля. Заряд протона e , его масса M .

4. На рисунке 2 изображена схема опыта Френеля по наблюдению интерференции. Два одинаковых плоских зеркала образуют угол $2\alpha = 0,1$ рад. Точечный источник S находится на биссектрисе угла на расстоянии $d = 20$ см от линии пересечения зеркал. При каком минимальном размере зеркал a на удаленном экране \mathcal{E} могут наблюдаться интерференционные полосы? Прямые лучи от источника на экран не попадают.

Б и л е т 2

1. Два тела с массами m и $3m$ движутся по взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 3). После соударения тело массы m остановилось. Какую часть его энергии составляет выделившееся при ударе тепло?

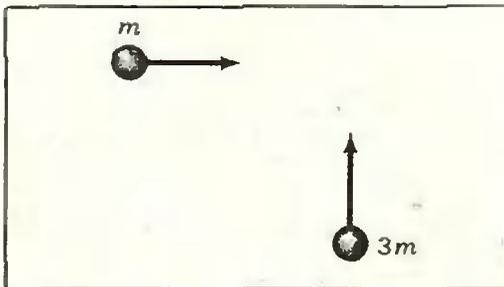


Рис. 3.

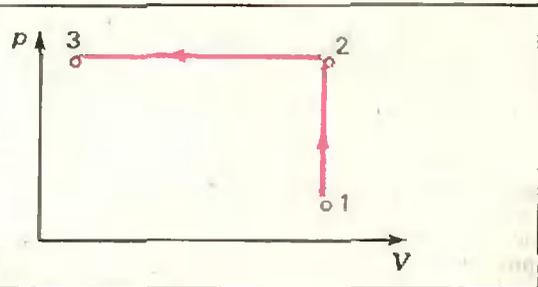


Рис. 4.

2. В настоящее время представляется возможным достижение давлений (например, с помощью специальным образом сфокусированного лазерного излучения), при которых все линейные размеры твердых тел можно уменьшить в 10 раз.

Во сколько раз у такого «сверхплотного» вещества критическая масса меньше, чем у обычного?

В критическом состоянии, когда начинается цепная реакция, число вторичных нейтронов, рождающихся в веществе, равно числу нейтронов, покидающих его через поверхность. (Вторичными называются нейтроны, возникающие при взаимодействии с делящимся веществом уже имеющихся в нем нейтронов.)

3. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 8,30 \cdot 10^{-8}$ м. На какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженности $E = 7,5$ в/см?

Красная граница фотоэффекта для алюминия соответствует длине волны $\lambda_{\text{к}} = 33,2 \times 10^{-8}$ м. Постоянная Планка $h = 6,6 \times 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4. Радиус кривизны выпуклого сферического зеркала равен $R = 40$ см. Какую линзу следует приставить вплотную к зеркалу, чтобы получившаяся оптическая система давала прямое мнимое изображение предметов в натуральную величину?

Билет 3

1. В центр шара массы $M_1 = 300$ г, лежащего на краю стола, попадает горизонтально летящая пуля массы $M_2 = 10$ г и пробивает его насквозь. Шар падает на расстоянии $s_1 = 6$ м от стола, а пуля — на расстоянии $s_2 = 15$ м. Высота стола $H = 1$ м. Определить первоначальную скорость пули.

2. Электрический утюг с терморегулятором, установленным в положение «шерсть», нагревается до температуры $t_1 = 140^\circ \text{C}$. При этом в установившемся режиме регулятор включает утюг на время $t = 30$ с через промежутки времени $T_1 = 5$ мин. В положении «лен» утюг включается на те же 30 с через более короткие промежутки времени $T_2 = 3$ мин. Определить температуру утюга при регуляторе, установленном в положение «лен». Температурной зависимостью сопротивления нагревателя пренебречь. Температура в комнате $t_0 = 20^\circ \text{C}$.

3. В одной из моделей молекулярного иона водорода H_2^+ предполагается, что электрон движется по круговой орбите, лежащей в плоскости, перпендикулярной линии, соединяющей протоны. Расстояние между протонами R , заряд электрона e , его масса m_e . Найти скорость, с которой движется электрон.

4. Одна из поверхностей тонкой линзы посеребрена. На расстоянии $a = 28$ см от линзы на ее оси находится точечный источник света. Если линза обращена к источнику посеребренной стороной, то расстояние между источником и его мнимым изображением оказывается равным 56 см. Если линза повернута к источнику другой стороной, то она дает параллельный пучок лучей. Определить фокусное расстояние посеребренной линзы.

Билет 4

1. С помощью линзы получено изображение Солнца. Диаметр изображения равен $d = 3$ мм, а расположено оно на расстоянии $L = 32$ см от линзы. Известно, что расстояние от Земли до Солнца равно $R = 150$ млн. км, а продолжительность земного года $T = 365$ сут. Вычислить с помощью этих данных ускорение свободного падения у поверхности Солнца.

2. Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 3 по изохоре 1—2 и затем по изобаре 2—3 (рис. 4). На изохоре газу сообщается такое же количество тепла $Q = 3675$ Дж, какое выделяется на изобаре. Найти конечную температуру газа, если его начальная температура $t_0 = 27^\circ \text{C}$. Теплоемкость газа $C_V = 21$ Дж/моль·град.

3. Два небольших проводящих шара радиуса r расположены на расстоянии R друг от друга. Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определить потенциал шара, который был заземлен первым, если первоначально каждый шар имел заряд q .

4. Оптическая система состоит из двух линз, имеющих фокусные расстояния $F_1 = -10$ см и $F_2 = +10$ см, раздвинутых на расстояние $d = 5$ см. При каких положениях предмета (со стороны L_1) эта система будет давать действительное изображение?

В. Е. Белонучкин, В. И. Чехлов



РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ

Математики о математике

Под таким названием в издательстве «Знание» в 1972 году была выпущена брошюра *) , содержащая две статьи, переведенные с английского.

*) Математики о математике (сборник статей). Составитель проф. В. И. Левин. Перевод с английского кандидата философских наук В. Н. Тростникова. М., «Знание», 1972. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 12.)

Эти статьи образуют главу под названием «Неразумность математики» в третьем томе четырехтомной антологии «Мир математики», вышедшей в США в 1956 году и в Англии в 1960 году. Авторами статей являются известные ученые.

Первая статья называется «Потерянный и найденный парадокс»; она написана Эдвардом Касером и Джеймсом Р. Ньюменом. Начинается она так: «Вероятно, величайший парадокс состоит в том, что в математике имеются парадоксы».

Первый тип парадоксов — это противоречия и абсурдные утверждения, являющиеся следствием неправильного рассуждения. Затем — парадоксы странные, кажущиеся невероятными, но, как показывают строгие доказательства, — истинные. Третий и наиболее важный тип парадоксов связан с теорией множеств; такого типа парадоксы привели к пересмотру оснований математики. Логические парадоксы весьма озадачили логиков и математиков и поставили проблемы, касающиеся самого существования математики, проблемы, которые до сего дня не получили удовлетворительного решения.

В статье сначала рассматриваются примеры парадоксов второго типа. Приведем один из них. Две равные монеты лежат на столе, касаясь окружностями. Первая (пусть левая) монета, оставаясь на плоскости стола, катится по ободку второй (неподвижной) монеты. Когда точка касания монет пройдет половину окружности и окажется в диаметрально противоположной точке неподвижной монеты справа, то подвижная монета совершит не пол оборота, а полный оборот (цифра на ней опять окажется в нормальном положении)!

Говоря о геометрических заблуждениях, авторы лишь упоминают об оптических иллюзиях и приводят примеры ошибок не психологического, а математического характера. Например, предлагается такой парадокс (мы даем его в сокращении):

$ABCD$ — прямоугольник (см. рисунок). $CH = HB$; $HO \perp CB$; $AE = AB$; $CK = KE$; $KO \perp CE$.

$\triangle OAE = \triangle OCD$ (по трем сторонам). Отсюда $\sphericalangle ODC = \sphericalangle OAE$. Но $\sphericalangle ODA = \sphericalangle OAD$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAE$ (прямой угол равен тупому!).

Как это измерить?

В последние годы выдано довольно много задачек по физике. А если подсчитать, сколько «почему» в них содержится, то получится весьма внушительное число. Вопрос «почему» очень часто задается не только в задачниках, но и в учебной и популярной литературе. Например, замечательная книжка М. Илина так и называется — «Сто тысяч ПОЧЕМУ». А вот вопросу «как» повезло несколько меньше — зада-



чи, в которых предлагается указать способ измерения той или иной физической величины, встречаются относительно редко. А ведь «как» может быть не менее интересно, чем «почему». Яркую иллюстрацию этому можно найти в воспоминаниях о выдающемся физике Энрико Ферми *), где речь идет о первом испытании атомной бомбы. «Ферми встал и начал сыпать маленькие кусочки бумаги. Он подготовил про-

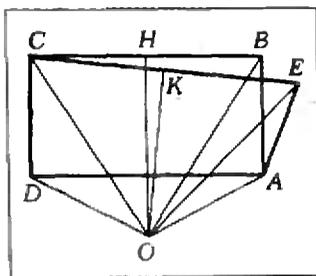
*) Э. Сегре, «Энрико Ферми — физик», М., «Мир», 1973.

Изложение этого парадокса авторы заканчивают так: «Можете ли вы найти здесь ошибку? Дадим совет: сделайте чертеж с максимальной аккуратностью».

Однако в данном парадоксе найти ошибку, содержащуюся в чертеже, можно с помощью логического исследования. Поскольку $OB=OC$ и $OE=OC$, то $OB=OE$. Точка O лежит на среднем перпендикуляре отрезка BE , а этот перпендикуляр проходит через точку A (потому что $AE=AB$). Значит, треугольники OAB и OAE расположены симметрично относительно прямой OA , а не накладываются частично. И поэтому равенство прямого и тупого углов не получается.

Рассматривая арифметические парадоксы, авторы статьи отмечают что, используя деление на ноль, можно доказать, что любое число равно любому другому. Несоблюдение алгебраического правила о том, что квадратный корень из положительного числа имеет два противоположных значения, также приводит к ошибкам и противоречиям. Читателю предлагается самостоятельно разобраться в парадоксе

$$1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2, \text{ т. е. } 1 = -1.$$



Приведены примеры бесконечных числовых рядов, в частности знаменитый ряд $1-1+1-1+1-1\dots$ доставивший немало хлопот Лейбницу, а также ряд, эквивалентный натуральному логарифму числа 2: $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 \dots \approx 0,69315$.

Путем некоторых преобразований, недопустимых с точки зрения теории бесконечных рядов*), можно получить парадоксальные

*) В «Кванте», 1974, № 9 была опубликована статья М. Л. Гервера «От перемены мест слагаемых». В ней даются предварительные сведения из теории бесконечных рядов. Прочитав эту статью, вы легко сможете объяснить причину этих парадоксов.

результаты:
 $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0,$
 $1 - (1-1) - (1-1) - \dots = 1.$ Следовательно $0 = 1!$

Понятие бесконечности, сыгравшее важную роль в развитии математики, породило новые проблемы и парадоксы, — в частности, в теории бесконечных множеств. Дело в том, что при работе с бесконечностью нужны свои специальные правила.

Среди логических парадоксов приведен парадокс о парикмахере, который бреет всех тех, кто не бреет сам, и в соответствии с этим правилом не может себя ни брить, ни не брить, и другие.

Авторы показывают, каким образом новый подход к вопросу о мере плоской фигуры, основанный на теории множеств, привел к неразрешимым противоречиям в связи с проблемой меры произвольной поверхности и мерой объемного тела. Немецкий математик Хаусдорф, а затем польские математики Баиак и Тарский получили ошеломляющие выводы. Если серьезнейшему результату польских математиков придать шуточную форму, то получится примерно сле-

стой эксперимент для определения энергии взрыва: в спокойном воздухе клочки бумаги упали бы к его ногам, а когда через несколько секунд после взрыва придет фронт ударной волны, они упадут несколькими сантиметрами дальше в направлении распространения волны. По расстоянию от точки взрыва и смещению воздуха под действием ударной волны можно вычислить энергию взрыва. Эти вычисления Ферми проделал заранее, подготовив таблицу, по которой он мог сразу же определить энергию в результате такого грубого, но простого измерения... Ха-

актерно, что его ответ оказался очень близким к результату аккуратно проведенных официальных измерений. Но последний появился через несколько дней после изучения записей, а Ферми получил свой через несколько секунд.

Часто в физике, разработка простых и нестандартных методов измерения определяет успех эксперимента, помогает разобраться в природе изучаемого явления. Приходится только жалеть, что вопросу «как» не очень пока везет в литературе для школьников. И именно по этой причине следует привет-

ствовать выпуск небольшой книги В. Н. Ланге «Экспериментальные физические задачи на смекалку» (серия «Библиотечка физико-математической школы», «Наука», М., 1974).

Во всех 116-ти задачах этой книги задается вопрос «как». Это не обычный задачник, где все распределено по разделам: механика, электричество, оптика, ведь для решения многих экспериментальных задач требуется знать больше, чем одну главу школьного учебника. Названия разделов звучат непривычно: «В домашней обстановке», «На озере», «На прогулке», «В космо-

дующее: шар размером с Солнце можно так разрезать на отдельные части, не имеющие общих точек, и затем так сложить эти части, не сжимая и не растягивая ни одну из них, что в результате Солнце превратится в горошину и поместится в заднем кармане брюк. Горошина же в свою очередь может быть так разрезана и сложена опять, что она заполнит всю видимую Вселенную, причем не будет никаких пустот. Никакая сказка, никакая фантазия не создали бы того, что дала строгая математическая логика. Эти результаты «представляют собой постоянный вызов воображению и являются вкладом в развитие математических понятий».

Вторая статья — «Кризис интуиции» — принадлежит математику Гансу Хану; статья посвящена свойствам интуиции, ее роли в математике, ее способности породить парадоксы. Автор рассматривает, какова роль интуиции в геометрии, и показывает, что «даже в той ветви математики, которая считается основной и первоначальной, роль интуиции постепенно сходит на нет, чтобы, наконец, окончательно

исчезнуть». Например, кривую линию с древних времен понимали как геометрическую фигуру, вычерчиваемую движущейся точкой. Но итальянский математик и логик Джузеппе Пеано доказал, что такая кривая может включать в себя целые участки плоскости (движущаяся точка может, например, пройти через каждую точку квадрата). В статье приводятся примеры кривых, обладающих и не обладающих «связностью в малом», дается представление о предложенном голландским математиком Л. Брауэром способе построения карты, в которой все граничные точки будут *тройными*, об идее определения размерности точечных множеств, о кривых, состоящих целиком из точек ветвления, существование которых доказал польский математик В. Серпинский.

Автор статьи утверждает, что обычная геометрия является высшим проявлением нашей интуиции, однако эта геометрия, как и другие математические и физические понятия, представляет собой логическую структуру.

Отмечается, что ненадежность интуиции была ясно понята такими выдающимися математиками, как О. Коши, Б. Больцано, К. Вейерштрасс, Г. Кантор, Р. Дедекиндр. Они считали, что каждое новое понятие в математике должно определяться логически и каждое доказательство должно использовать лишь строгую логику. Однако задача полной формализации математики и сведения ее к логике сложна и трудна, поскольку требует перестройки всей древней науки снизу доверху.

Мы рассказали здесь лишь о немногих вопросах, затрагиваемых в книге «Математики о математике». Книга очень полезна для старшеклассников, она знакомит читателя с некоторыми важнейшими идеями большой науки и, несомненно, способствует расширению кругозора юного читателя и повышению его интереса к математике.

Н. В. Метельский

се» — интересные физические задачи могут возникнуть везде.

Вот несколько задач из этой книжки.

1. Имеются две линзы: одна — собирающая, вторая — рассеивающая. Как определить, какая из них обладает большей оптической силой, не прибегая к помощи никаких приборов?

2. Вы хотите определить ширину реки в шагах. Как это сделать, разумеется, приблизительно, с помощью сорванной на берегу травинки?

3. Как с помощью сильного магнита (лучше подковообразного) определить, постоянным или переменным током питается электрическая лампочка?

Тот, кто не сможет решить задачи сразу, найдет в книге не только подробные решения, но и раздел «Подсказки». Воспользовавшись им, можно не лишать себя удовольствия решить задачу самостоятельно.

Правда, в книге много искусственных задач. Не слишком ли сложно, например, определять скорость велосипеда по количеству цинка, растворенного в элементе Грене? (в задаче 91 описывается устройство этого элемента).

К сожалению, и некоторые решения также не вполне удовлетворительны. Так, скажем, в решении задачи 18 для определения высоты дома нужно воспользоваться пустой консервной банкой

и секундомером. При этом учитывается конечность скорости звука, но не обращается внимание на не менее существенный фактор — сопротивление воздуха.

Но все же в целом книжка вполне интересна и нестандартна, хотя в ней довольно много простых задач. Большое число простых задач, конечно, нельзя считать недостатком книги. Она вполне доступна школьникам, только приступающим к изучению физики, и может помочь им выработать физическую интуицию.

Нет сомнения в том, что эта книга окажется полезной и школьникам, и учителям.

К. И. Кузьм

Новые книги

В 1975 году мы продолжаем публикацию материалов в разделе «Новые книги». Как и в прошлые годы, в этом разделе мы будем публиковать краткие аннотации на уже вышедшие книги и на книги, которые выйдут в 1975 году и представляют интерес для наших читателей. В связи с многочисленными просьбами читателей мы также будем публиковать аннотации на некоторые книги, выходящие в издательствах «Молодая гвардия», «Детская литература», «Мир» и «Знание».

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в I квартале 1975 года.

Связи на книги надо своевременно оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга-почтой».

Математика

Издательство
«Наука»

1. Маркушевич А. И., *Целые функции*. Объем 5 л., тираж 30000 экз., цена 15 к., издание 2-е.

Элементарные функции, изучаемые в средней школе, являются либо целыми функциями, либо частными двух целых функций, либо обратными функциями по отношению к этим функциям.

Настоящая книга знакомит читателей с общей теорией целых функций, с их важнейшими свойствами.

Книга написана интересно и занимательно. Она интересна для учащихся старших классов, а также будет полезна учителям математики.

2. Мостеллер Ф., *Пятьдесят занимательных вероятностных задач*. Объем 6 л., тираж 100000 экз., цена 30 к., издание 2-ое.

Большинство задач, представленных в этой кни-

ге, решаются элементарным путем. Для их решения вполне достаточно знаний, полученных в средней школе, и лишь некоторые из них требуют знаний курса анализа, выходящих за рамки школьного курса математики.

Книга будет полезна учащимся старших классов, учителям математики и физики.

3. Воробьев Н. Н., *Признаки делимости*. Объем 4 л., тираж 50000 экз., цена 14 к., издание 2-е.

В книге изложены некоторые элементарные вопросы теории чисел, в частности, вопросы теории делимости. Излагая признаки делимости, автор затрагивает некоторые вопросы теории отношений и теории алгоритмов.

4. Фомин С. В., *Системы счисления*. Объем 3 л., тираж 50000 экз., цена 10 к., издание 3-е.

В этой небольшой брошюре автор подробно рассказывает о различных системах счисления. В доступной и весьма занимательной форме автор рассказывает об истории возникновения, свойствах и применениях различных систем счисления.

Книга будет очень полезна учащимся старших классов и учителям математики и физики.

5. Вилеккин Н. Я., *Популярная комбинаторика*. 12 л., 100 000 экз., 40 к.

Комбинаторика — один из разделов математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам и многим другим. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений. В книге в популярной форме рассказывается об интересных комбинаторных задачах и методах их решения.

Издательство «Мир»

6. Дьюдени Г. Э., *Избранные задачи и головоломки*. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 49 к.

В данной книге представлено более 500 задач и головоломок известного английского ученого и популяризатора математики.

Книгу с большим удовольствием и большой пользой прочтут все читатели, любящие математику.

Физика

Издательство
«Наука»

1. Баканина Л. П., Белонучкин В. Е., Козел С. М. и др., *Сборник задач по физике*. Объем 21 л., тираж 300 000 экз., цена 67 к., издание 3-е.

Этот сборник задач по элементарному курсу физики содержит задачи повышенной трудности, не выходящие, однако, за рамки программы средней школы. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями.

Большинство задач этого сборника были использованы при проведении вступительных экзаменов в Московский физико-технический институт.

Книга рассчитана на учащихся старших классов, учителей физики и лиц, самостоятельно готовящихся к вступительным экзаменам в вузы.

2. Демин В. Г., *Судьба Солнечной системы*. Объем 13 л., тираж 20 000 экз., цена 45 к., издание 2-е.

«Распадается ли Солнечная система?» — таков основной вопрос, рассматриваемый в этой книге.

Книга рассчитана на учащихся старших классов и учителей физики и астрономии.

3. Паули В., *Физические очерки*. (Сборник статей.) 15 л., 20 000 экз., 95 к.

В сборник вошли научно-популярные статьи одного из крупнейших физиков-

теоретиков нашего века Вольфганга Паули (1900—1958). В них отразились главные этапы развития современной физики: принципы запрета и симметрии, развитие квантовой электродинамики, история нейтрино. Включены статьи о творчестве Эйнштейна, Зоммерфельда, Эренфеста, а также почти неизвестная у нас статья о замечательном естествоиспытателе XVI в. Иоганне Кеплере.

4. Франкфурт У. И., Френк Л. М. *У истоков квантовой механики*. 10 л., 30 000 экз., 65 к.

В книге рассказывается о замечательном периоде в истории физики (1895—1925), богатом крупными открытиями, когда исследовательская мысль стремилась раскрыть тайны строения вещества.

Обнаружение электрона и изучение его свойств, исследование электрических разрядов в газах, учение о квантах света, создание теории относительности Эйнштейном и теории атома Бором — все это вехи на пути создания волновой и квантовой механики, освещение истории которых читатель найдет в книге.

Издательство «Молодая гвардия»
1. Ходанов М., *Как надо себя вести*. Объем 8 л., тираж 200 000 экз., цена 44 к.

Это книга о хорошем тоне, о том, как надо и как не надо себя вести. Это книга о культуре поведения, которая связана с внутренней культурой человека.

Научно-фантастическая литература

2. Адамов А., *Злым ветром*. Объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 10 к.

Эта остросюжетная книга продолжает серию книг Адамова, ранее выпущенных в этом издательстве.

3. *Приключения*, 75. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 50 к.

Книга представляет собой традиционный сборник

приключенческих повестей и рассказов советских авторов.

Издательство «Детская литература»

4. Войскунский Е., Лукодьянов И., *Ур, сын Шама*. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 87 к.

Фантастический роман о человеке, родившемся на другой планете и вернувшемся на Землю.

5. Свердлов А., *Схватка с оборотнем*. Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 61 к.

Приключенческая повесть о работе сотрудников КГБ.

6. Стругацкий А., Стругацкий Б., *Полдень XXII века. Малыш*. Объем 30 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб.

Эти две повести известных советских фантастов посвящены миру будущего.

Мы приводим список книг, имеющихся в наличии. Заказы направлять по адресу: 103 050, Москва, К-50, ул. Медведова, 1, отдел «Книга-почтой» магазина № 8 Москниги.

1. Воробьев Н. Н., *Теория рядов*, «Наука», 1973, 208 стр., 38 к.

2. Градштейн И. С., *Прямая и обратная теорема* (элементы алгебры логики), «Наука», 1973, 128 стр., 24 к.

3. Кантор И. Л., Солодовников А. С., *Гиперкомплексные числа*, «Наука», 1973, 144 стр., 22 к.

4. Ламперти Д., *Вероятность*, перев. с англ., «Наука», 1973, 184 стр., 33 к.

5. Яглом А. М., Яглом И. М., *Вероятность и информация*, «Наука», 1973, 512 стр., 1 руб. 11 к.

6. Парнов Е. И., *На перекрестке бесконечностей*, «Атомиздат», 1967, 460 стр., 46 к.

7. Ромер А., *Неугомонный атом*, «Атомиздат», 1963, 128 стр., 18 к.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

Вычислительная машина Джона Нопера

Покажем (см. рис.), как выполнять на этом приборе умножение, скажем, число 3579 на 6. Положим подряд в коробке дощечки с номерами 3, 5, 7, 9 и в 6-й строке прочтем искомое число. Нам придется, правда, преодолеть небольшую сложность. Число десятков последующей дощечки входит в тот же десятичный разряд, что и число единиц предыдущей дощечки. Эти два числа при получении произведения нужно складывать.

0	3	5	7	9
1	0 3	0 5	0 7	0 9
2	0 6	1 0	1 4	1 8
3	0 9	1 5	2 1	2 7
4	1 2	2 0	2 8	3 6
5	1 5	2 5	3 5	4 5
6	1 8	3 0	4 2	5 4
7	2 1	3 5	4 9	6 3
8	2 4	4 0	5 6	7 2
9	2 7	4 5	6 3	8 1

Поэтому произведение может быть записано так: $1 \cdot 10^4 + (8 + 3) \cdot 10^3 + (0 + 4) \cdot 10^2 + (2 + 5) \times 10 + 4 = 21\,474$.

С помощью этого прибора можно также выполнять деление и извлекать квадратные корни.

В. Н. Березин



ИНФОРМАЦИЯ

Пятая математическая олимпиада МЭСИ

Олимпиада проводится в два тура: I — тур — заочный и II — очно-заочный.

К участию во втором очно-заочном туре будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 15 марта 1975 года (по штемпелю почты). Школьники Москвы для проведения очного тура будут приглашаться в МЭСИ. Иногородние школьники участвуют во втором туре заочно. Каждый участник олимпиады, допущенный ко второму туру, будет об этом извещен. Чтобы ускорить получение ответа из института, приложите к письму конверт с вашим адресом.

Адрес МЭСИ: 119435, Москва, Б. Саввинский пер., 14, «Олимпиада-75».

Решение задач выполняется на русском языке в ученической тетради. Проверка всех работ, представленных на олимпиаду, будет производиться ЭВМ. Поэтому просим в конце тетради поместить ответы к задачам, заполнив следующую таблицу

Номера задач	1	2	3	4	5
Ответы					

Задачи первого тура:

1. Найти целую часть числа

$$10 \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{1975}}}}$$

2. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} ||3^x + 4x - 9| - 8| \leq 3^x - 4x - 1, \\ 2^{x^2} > x + 1. \end{cases}$$

3. Найти (в градусах) наименьшее положительное значение $x + y$, если

$$(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2.$$

4. Из вершины прямого угла треугольника опущен перпендикуляр на гипотенузу. На этом перпендикуляре, как на диаметре, построена окружность. Из концов гипотенузы к этой окружности проведены касательные, касающиеся ее в точках M и N и пересекающиеся при продолжении в точке L .

Найти длины касательных MZ и NZ , если гипотенуза равна 6.

5. Шар радиуса 2,5 касается грани ABC пирамиды $ABCD$ в точке C и ребра BD в точке D . Продолжение ребра AD вторично пересекает поверхность шара в точке K так, что CK — диаметр шара.

Найти объем пирамиды, если $BD = 10$, $AC = 12$.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В городе Васюки каждая семья занимает отдельный дом. В один прекрасный день каждая семья переехала в дом, ранее занимаемый другой семьей. В ознаменование этого дня горсовет решил покрасить все дома в красный, синий или желтый цвета, причем так, чтобы для каждой семьи цвета старого и нового домов не совпадали. Удастся ли горсовету это сделать?

2. Вы с другом спускаетесь в глубокую-глубокую шахту. У вас в руках рычажные весы, на которых уравновешен груз в 1 кг. У вашего друга — пружинные весы, на которых висит груз массой тоже 1 кг. Изменятся ли показания весов, когда вы спуститесь очень глубоко?

3. По кругу выписаны 1974 цифры. Если прочесть их по часовой стрелке, начиная с некоторого места, то получится число, делящееся на 27. Доказать, что если его прочесть с любого другого места, то тоже получится число, делящееся на 27.

4. Вам надо подогреть на спиртовке воду. Для этого предлагается два стакана: один из толстого стекла, другой из очень тонкого стекла. Какой стакан вы выберете?

5. Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 км за три часа? Скорость пешехода равна 5 км/ч, скорость мотоцикла (с грузом или без груза) — 50 км/ч.



Рисунки Э. Назерова



Головоломки и графы

М.П. Барболин

Всем известны задачи на разливание, переправы, дележи. Они прочно вошли в практику математических кружков, викторин, математических вечеров и т. д. Обычно такие задачи решаются «в уме» и требуют немало остроумия и смекалки. Найти решение такой задачи каким-либо одним способом бывает не сложно. Гораздо сложнее указать самый короткий способ или все возможные способы решения.

Ответы на эти вопросы можно легко получить с помощью графических схем, состоящих из точек, соединенных между собой стрелками. Такие схемы называются *графами*.

Задача 1. *Два человека имеют полный кувшин молока в 8 литров, а также два пустых кувшина в 5 и в 3 литра. Как они могут разделить молоко поровну?*

Для решения задачи воспользуемся графами. Присвоим каждому кувшину номер: кувшину в 8 л — № 1, кувшину в 5 л — № 2, кувшину в 3 л — № 3. Рассмотрим возможные варианты наполнения кувшинов, получающиеся в результате одного переливания.

В начальный момент кувшин № 1 наполнен, а № 2 и № 3 — пустые.

Изобразим это состояние точкой (8.0.0.) (рис. 1). Теперь из кувшина № 1 можно перелить в кувшин № 2 пять литров или в кувшин № 3 — три литра. В результате получается два новых варианта наполнения кувшинов (3.5.0.) и (5.0.3.). Их также изобразим точками, а стрелками покажем, что они получаются из исходного варианта (8.0.0.) (рис. 2). Других вариантов одним переливанием получить нельзя.

Делаем второе переливание. Чтобы не пропустить ни одной возможности, рассмотрим кувшины в порядке номеров. Берем вариант (3.5.0.) (в кувшине № 1 — 3 литра, в кувшине № 2 — 5 литров, кувшин № 3 — пуст). Из кувшина № 1 можно перелить молоко только в № 3, в результате получится новый вариант наполнения: (0.5.3.). На графе от точки (3.5.0.) ведем стрелку к точке (0.5.3.) (рис. 3). Из кувшина № 2 можно перелить молоко в № 1 или в № 3 (переливание в два кувшина считается как два последовательных переливания!), но переливание в кувшин № 1 не дает нового варианта (получающийся при этом вариант (8.0.0.) уже рассматривался), поэтому делать переливание нецелесообразно. Переливая молоко из № 2 в № 3, получаем новый вариант (3.2.3.), показываем это на графе точкой (3.2.3.) (рис. 3). Кувшин с номером три пустой, поэтому его можно не рассматривать.

Далее переходим к варианту (5.0.3.). Рассуждая аналогично предыдущему, получим еще один вариант

(5.3.0.) и соответственно построим граф.

Теперь ясно, что процесс решения сводится к «выращиванию» графа-дерева. Продолжая рассуждения, дойдем до графа, изображенного на рисунке 4.

На нем видны две цепи, идущие из точки (8.0.0.) и заканчивающиеся искомым вариантом (4.4.0.). Они соответствуют двум различным способам

искового разливания:

I способ: (8.0.0.) → (3.5.0.) → (3.2.3.) → (6.2.0.) → (6.0.2.) → (1.5.2.) → (1.4.3.) → (4.4.0.)

II способ: (8.0.0.) → (5.0.3.) → (5.3.0.) → (2.3.3.) → (2.5.1.) → (7.0.1.) → (7.1.0.) → (4.1.3.) → (4.4.0.)

Задача 2. *Перевозчику (П) нужно переправить через реку волка (В), козу (К) и мешок с капустой (М). Лодка так мала, что кроме перевозчика можно взять только один из объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять вместе с козой, а козу — вместе с волком. Как осуществить переправу?*

Пусть для определенности в начальный момент все находится на левом берегу (Л. Б.). Изобразим исходную ситуацию точкой и обозначим ее так: (В. К. М. П. || —) (рис. 5). В первый рейс перевозчик может взять только козу (так как ее нельзя оставить ни с волком, ни с капустой). В результате получим новую ситуацию: (В. М. || К. П.). (волк и мешок на левом берегу, коза и перевозчик — на правом). Изобразим ее точкой и проведем к ней стрел-

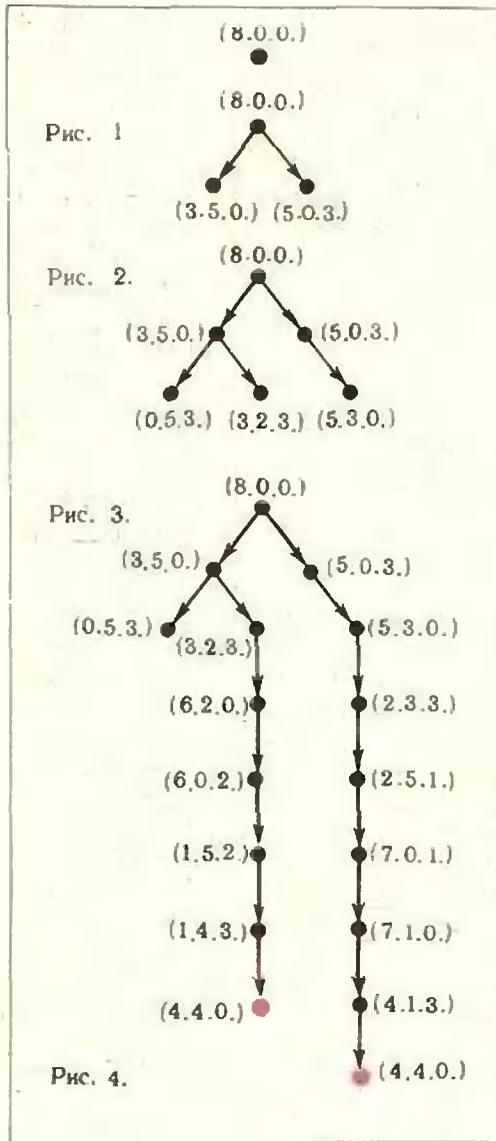


Рис. 4.

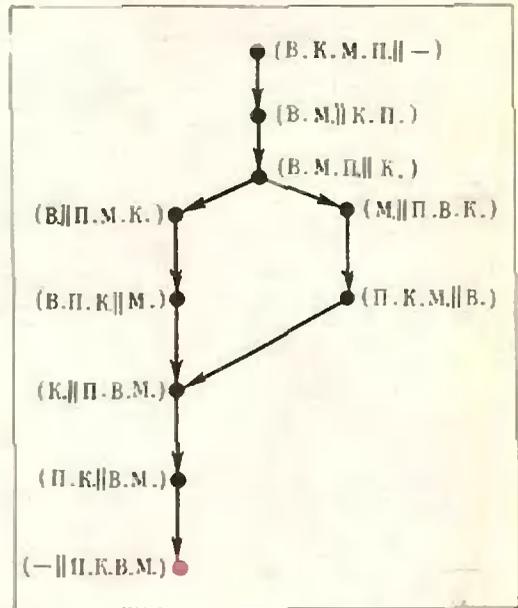


Рис. 5.

ку из точки (В. К. М. П. || —), показывающую, что она получена из ситуации (В. К. М. П. || —) за одну перевозку. Обратный перевозчик едет один (возвращается к исходной ситуации — везти козу обратно — нецелесообразно). Возникающую ситуацию (В. М. П. || К.) изображаем точкой на графе. Далее перевозчик имеет две возможности: везти или волка (В) или мешок (М). Получаем две возможные ситуации: (В. || П. М. К.) или (М. || П. В. К.). Каждую из них изображаем точкой на графе. Рассматривая аналогично каждый из полученных вариантов, мы приходим к требуемой ситуации: (— || П. К. В. М.) (рис. 5). Две (частично совпадающие) цепи на графе соответствуют двум различным способам решения задачи.

Упражнения

1 (Задача Пуассона). Известному французскому математику Симону Пуассону (1781—1810) в юности предложили задачу. Заинтересовавшись ею, Пуассон увлекся математикой и посвятил этой науке всю свою жизнь. Вот эта задача.

Некто имеет 12 пинт вина (пинта — мера объема) и хочет подарить из этого количества половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда: один в 8, другой в 5 пинт.

Каким образом налить 6 пинт вина в сосуд на 8 пинт? Какое наименьшее число переливаний необходимо при этом сделать?

2. Имеется 4 бочки. В первую входит 24 ведра, емкость второй — 13 ведер, третьей — 11 ведер, четвертой — 5 ведер. Вначале наполнена только первая бочка. Требуется ее содержимое разлить на три равные части так, чтобы первые три бочки содержали по 8 ведер, а четвертая осталась пустой.

3 (Старинная задача). Три солдата и три разбойника должны переправиться через реку. Они нашли лодку, в которую помещается только два человека. Нельзя оставить на берегу больше разбойников, чем солдат. Как им всем шестерым переправиться через реку? Нйти все возможные способы.*

* Разрешается оставлять на берегу одних разбойников или одних солдат.



ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Арифметико-геометрическая прогрессия»

(см. «Квант», 1975, № 1)

1. На рисунке 1 изображены остроугольные треугольник $A_n B_n C_n$ и описанный около него треугольник $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$. Выразим угол A_{n+1} через угол A_n . Радиусы $B_n O_n$ и $C_n O_n$ окружности, описанной около треугольника $A_n B_n C_n$, перпендикулярны к сторонам $A_n B_n$ и $A_n C_n$ и образуют угол $B_n O_n C_n$, равный $2 \rightarrow A_n$; поэтому

$$\begin{aligned} \rightarrow A_{n+1} &= \rightarrow B_n A_{n+1} C_n = \\ &= \pi - \angle B_n O_n C_n = \pi - 2 \rightarrow A_n, \end{aligned}$$

то есть

$$\rightarrow A_{n+1} = -2 \rightarrow A_n + \pi.$$

Согласно формуле (2) (с. 37) находим

$$\rightarrow A_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\rightarrow A_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3}.$$

Соответственно найдем

$$\rightarrow B_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\rightarrow B_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3},$$

$$\rightarrow C_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\rightarrow C_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3}.$$

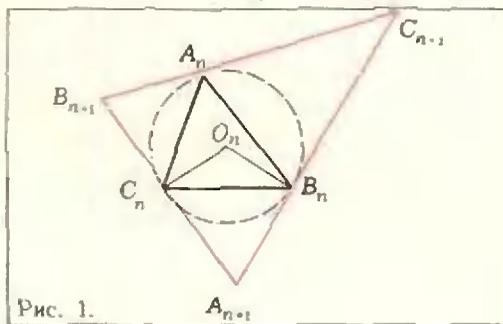


Рис. 1.

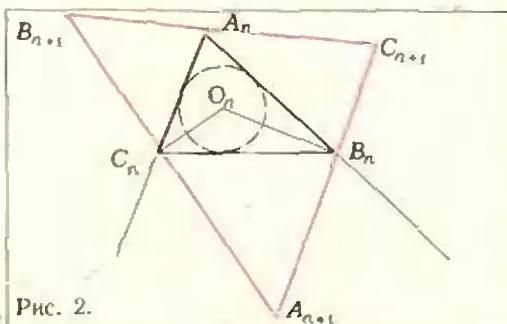


Рис. 2.

2. На рисунке 2 изображены треугольники $A_n B_n C_n$ и $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$. Заметим, что $A_{n+1} C_n$ перпендикулярна к $C_n O_n$, $A_{n+1} B_n$ — перпендикулярна к $B_n O_n$ (O_n — центр вписанной в треугольник $A_n B_n C_n$ окружности, $A_{n+1} C_n$ и $A_{n+1} B_n$ — биссектрисы внешних углов треугольника, $C_n O_n$ и $B_n O_n$ — биссектрисы соответствующих внутренних углов). Поэтому

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_{n+1} &= \sphericalangle B_n A_{n+1} C_n = \pi - \sphericalangle B_n O_n C_n = \\ &= \pi - (\pi - \sphericalangle Q_n B_n C_n - \sphericalangle O_n C_n B_n) = \\ &= \frac{1}{2} \sphericalangle B_n + \frac{1}{2} \sphericalangle C_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sphericalangle A_n, \end{aligned}$$

то есть

$$\sphericalangle A_{n+1} = -\frac{1}{2} \sphericalangle A_n + \frac{\pi}{2}.$$

Из формулы (2) получаем

$$\sphericalangle A_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

Аналогичные выражения — для $\sphericalangle B_{n+1}$ и $\sphericalangle C_{n+1}$. При $m \rightarrow \infty$ величины углов треугольника $A_m B_m C_m$ стремятся к $\frac{\pi}{3}$, то есть треугольник $A_m B_m C_m$ стремится к правильному.

3. На рисунке 3 изображены окружность и вписанные в нее треугольники $A_n B_n C_n$ и $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_{n+1} &= \sphericalangle B_{n+1} A_{n+1} C_{n+1} = \\ &= \sphericalangle B_{n+1} A_{n+1} A_n + \sphericalangle A_n A_{n+1} C_{n+1} = \\ &= \sphericalangle B_{n+1} B_n A_n + \sphericalangle A_n C_n C_{n+1} = \\ &= \frac{1}{2} \sphericalangle B_n + \frac{1}{2} \sphericalangle C_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sphericalangle A_n, \end{aligned}$$

то есть

$$\sphericalangle A_{n+1} = -\frac{1}{2} \sphericalangle A_n + \frac{\pi}{2}.$$

Последовательность величин углов $\{\sphericalangle A_n\}$ вновь образует арифметико-геометрическую

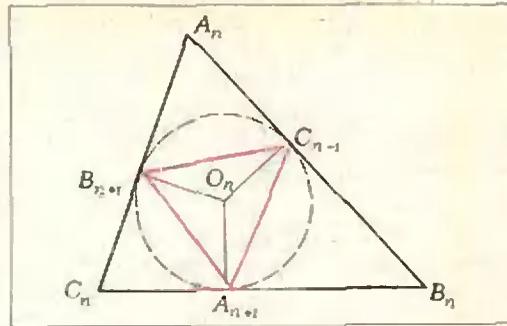


Рис. 4.

прогрессию, и поэтому

$$A_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

Аналогично получим

$$B_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(B_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}$$

и

$$C_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(C_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

4. Имеем (см. рис. 4)

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_{n+1} &= \sphericalangle B_{n+1} A_{n+1} C_{n+1} = \\ &= \frac{1}{2} \sphericalangle B_{n+1} Q_n C_{n+1} = \frac{1}{2} (\pi - A_n). \end{aligned}$$

По формуле (2)

$$\sphericalangle A_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

К статье «Транспортные сети и электрические цепи»

1. Доказательство аналогично приведенному в статье для задачи о максимальном потоке. Сперва нужно проанализировать одну ветвь $i - j$ и показать, что $p_i - p_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$ и $p_i - p_j \leq c_{ij}$ при $x_{ij} = 0$, то есть, что

$$p_i - p_j \leq c_{ij}$$

$$\text{и } [c_{ij} - (p_i - p_j)] x_{ij} = 0. \quad (1)$$

Доказательство утверждения, сформулированного в задаче, состоит из двух частей: 1) установления неравенства

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \geq p_1 - p_n \quad (2)$$

для любых значений x_{ij} , удовлетворяющих условиям а), б), в) (см. с. 17) задачи о минимизации транспортных затрат; 2) доказательство того, что для токов x_{ij} в ветвях модели неравенство (2) переходит в равенство (при этом используются соотношения (1)).

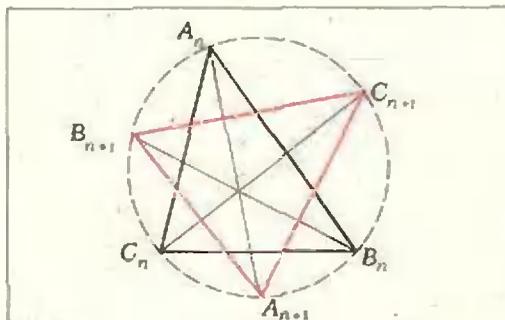


Рис. 3

2. Если хоть бы для одного x_{ij} выполнялось неравенство $0 < \tilde{x}_{ij} < 1$, то $\sum_{i,j} c_{ij} \tilde{x}_{ij} = \sum_{i,j} (p_i - p_j) \tilde{x}_{ij} < \sum_{i,j} (p_i - p_j) = p_1 - p_5$, что противоречит равенству $\sum_{i,j} c_{ij} \tilde{x}_{ij} = p_1 - p_5$. Здесь учтено, что если по ветви $i - j$ идет ток $\tilde{x}_{ij} > 0$, то $p_i - p_j > 0$.

3. Достаточно принять стоимости затрат перевозки единицы груза c_{ij} равными длинам l_{ij} соответствующих дуг. Решение задачи определит минимальное значение суммы $\sum_{i,j} l_{ij} x_{ij}$, равное $\sum_{i,j} l_{ij} \tilde{x}_{ij}$. Из результата задачи 2 следует, что последняя сумма равна длине кратчайшего пути из входа к выходу сети, а сам этот путь определяется ветвями, по которым проходит ненулевой ток.

К статье «Прямая Эйлера»

Для краткости радиус-векторы \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , ... будем обозначать через \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , ... Согласно правилу вычитания векторов, $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$. Эта формула используется при решении задач 1—5.

1. б) Пусть за начало векторов принят центр O сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$. Учитывая, что $(\vec{B} + \vec{C})(\vec{B} - \vec{C}) = \vec{B}^2 - \vec{C}^2 = \vec{R}^2 - \vec{R}^2 = 0$, где R — радиус сферы, найдем $\vec{AH} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2} \vec{AD} \cdot \vec{CB}$.

Так как $AD \perp BC$, то $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$ и, следовательно, $\vec{AH} \cdot \vec{CB} = 0$, то есть $\vec{AH} \perp \vec{CB}$. Аналогично получим, что $\vec{AH} \perp \vec{CD}$. Значит, точка H лежит на высоте тетраэдра, проведенной из вершины A . Точно так же доказывается, что точка H принадлежит трем другим высотам тетраэдра.

2. Считая началом векторов любую точку O пространства, имеем

$$\begin{aligned} & \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = \\ & = (\vec{B} - \vec{A})(\vec{D} - \vec{C}) + (\vec{C} - \vec{B})(\vec{D} - \vec{A}) + \\ & + (\vec{A} - \vec{C})(\vec{D} - \vec{B}) = 0. \end{aligned}$$

а) Пусть высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке D . Тогда $\vec{BC} \cdot \vec{AD} = 0$ и $\vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0$. Значит, $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ и $\vec{CD} \perp \vec{AB}$, то есть точка D также лежит на высоте, проведенной из вершины C .

3. Приняв за начало векторов любую точку O , получим

$$\begin{aligned} & |AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 = \\ & = (\vec{A} - \vec{B}) + (\vec{C} - \vec{D})^2 - (\vec{A} - \vec{D})^2 - \\ & - (\vec{B} - \vec{C})^2 = 2(\vec{A} - \vec{C})(\vec{D} - \vec{B}) = 2\vec{AC} \cdot \vec{DB}. \end{aligned}$$

4. Примем вершину D тетраэдра $ABCD$ за начало векторов. Обозначим $\vec{BDA} = \alpha$, $\vec{CDA} = \beta$, $\vec{ADB} = \gamma$, тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{B}| \cdot |\vec{C}|}, & \cos \beta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{C}|}, \\ \cos \gamma &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}. \end{aligned}$$

Так как $AC \perp BD$, то $\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{C} - \vec{B}(\vec{A} - \vec{C}) = \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$, откуда $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C}$. Аналогично, $\vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A}$. Поэтому $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ одновременно либо положительны, либо равны нулю, либо отрицательны, то есть углы α , β , γ одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые.

Если хотя бы при одной вершине плоские углы прямые или тупые, то все остальные плоские углы тетраэдра являются острыми, поэтому грань, противолежащая этой вершине, является остроугольным треугольником.

5. б) Выберем за начало векторов центр O сферы, описанной около ортоцентрического тетраэдра $ABCD$, и вычислим радиус-вектор точки Q_2 . Из условия следует, что $|HG_1| : |G_1G_2| = 1 : 2$. Пользуясь формулой (1) (в статье), найдем $\vec{G}_1 = \frac{\vec{G}_2 + 2\vec{H}}{3}$, откуда

$\vec{G}_2 = 3\vec{G}_1 - 2\vec{H}$. Учитывая, что $3\vec{G}_1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ и $2\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$, получим $\vec{OG}_2 = -\vec{OD}$. Следовательно, точки G_2 и D симметричны относительно центра O сферы, описанной около тетраэдра, обе лежат на сфере и DG_2 — диаметр этой сферы.

Так как $\vec{HH}_2 = 3\vec{HH}_1$, то $\vec{HH}_1 : \vec{H}_1\vec{H}_2 = 1 : 2$. Из подобия треугольников \vec{HH}_1G_1 и \vec{HH}_2G_2 вытекает, что $\vec{HH}_2G_2 = \vec{HH}_1G_1 = 90^\circ$, то есть диаметр DG_2 сферы виден из точки H_2 под прямым углом. Следовательно, точка H_2 также лежит на сфере.

6. б) Воспользуемся результатом предыдущей задачи при тех же обозначениях.

Гомотетия с центром гомотетии H и коэффициентом $\frac{1}{2}$ переводит точки G_2 , H_2 , D соответственно в точки G_1 , H_1 , D_1 , где D_1 — точка, делящая отрезок HD в отношении $1:2$, считая от ортоцентра H . Так как точки G_2 , H_2 , D принадлежат сфере, описанной около тетраэдра, то указанная гомотетия переводит эту сферу в сферу, проходящую через точки G_1 , H_1 , D_1 (сферу 12 точек),

а ее центр O — в центр O_1 сферы 12 точек так, что $\vec{HO}_1 = \frac{1}{3} \vec{HO}$.

К статье «Когда помогают графики»

1. $0 < a < 5$.
2. $-\frac{9}{10} < m < -\frac{1}{2}$.
3. $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$.
4. $a = 1$.
5. $a_6 = -3\frac{9}{19}$.
6. $m > 1$.
7. $-\frac{1}{2} \leq a < -\frac{1}{4}$.
8. $2\sqrt{2} \leq a < \frac{11}{3}$.
9. $a < -2$.
10. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1975, № 1)

1. Пройти половину расстояния от дуба до вяза, повернуть налево под прямым углом и пройти такое же расстояние. В этой точке и закопать клад.
2. заказ = 59 259.
3. Нет, не удастся. Каждая фишка смещается на четное число мест, и поставить первую фишку на последнее место (сместив ее на 99 мест) не удастся.

4. Изменить направление движения на противоположное без взаимодействия с другими телами невозможно.

5. Нет. Конь на каждом ходу попадает на поле другого цвета, поэтому должен пройти равное число черных и белых полей, а хулиган Вася отпилил неравное число черных и белых полей.

К геометрическим задачам

(см. «Квант», 1975, № 1, с. 63)

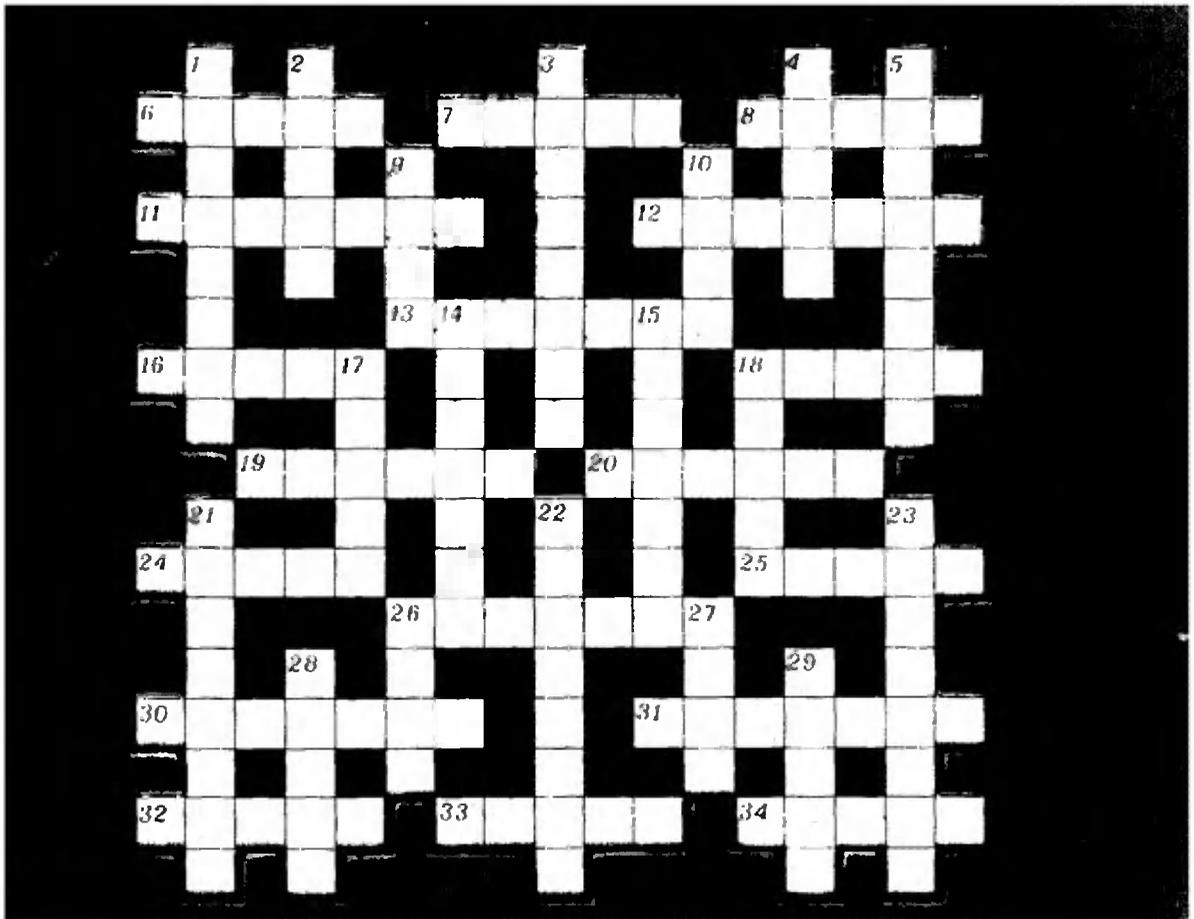
1. У к а з а н и е. Легко проверить, что точки A, B, C делят пополам дуги EF, FD, DE .
2. Разделить сторону BC точкой F в отношении $m:n$. На BC описать полуокружность и восстановить к BC в точке F перпендикуляр FG (точка G — на полуокружности). Продолжить CB и DA до пересечения в E . Провести окружность с центром E и радиусом EG , пересекающую BC в H . Через H провести HK параллельно CD .
3. У к а з а н и е. Легко видеть, что H — центр окружности, вписанной в UVW . Значит, $OA \perp VW$ (так как A делит пополам $\sphericalangle VW$).
4. Провести хорду AM через H и разделить HM пополам точкой D . Через D провести хорду BC перпендикулярно к AM . Треугольник ABC — искомым.
5. Провести прямую $A'X'B'$ параллельно AXB на расстоянии c от нее ($XX' \perp AB$), где c — радиус данной окружности. Соединить центр O окружности с X' и разделить OX' точкой Q так, что $OQ \cdot OX' = r^2$. Провести окружность с центром E , касающуюся $A'B'$ в X' и проходящую через Q . Окружность с центром E и радиусом $EX' \pm c$ — искомая (знак у c зависит от того, по одну сторону от AB лежат точки E и O или по разные).

Корректор *Е. Я. Строева*

117071, Москва, В-7, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 13/XI-74 г.
Подписано в печать 27/XI-74 г.
Бумага 70×100/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,75
Тираж 365580 экз. Т-21339
Цена 30 коп. Заказ 2328

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книж-
ной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



КРОССВОРД

По горизонтали

6. Итальянский физик, лауреат Нобелевской премии. 7. Светотехническая единица. 8. Английский ученый, разработавший теоретические основы акустики и физики колебаний. 11. Русский физик. 12. Советский ученый, конструктор ультразвуковых дефектоскопов. 13. Основная часть двигателя внутреннего сгорания. 16. Русский физик. 18. Французский физик, установивший закон взаимодействия электрических зарядов. 19. Дополнительная шкала на измерительном инструменте. 20. Сплав, применяемый в электротехнике. 24. Изобретатель логарифмов. 25. Единица магнитной индукции. 26. Строительный материал. 30. Советский авиаконструктор. 31. Электрод полупроводникового триода. 32. Подвижная часть электрических машин. 33. Русский физик и электротехник. 34. Деталь подшипника.

По вертикали

1. Приспособление, обладающее односторонней проводимостью. 2. Единица силы тока. 3. Элементарная частица. 4. Английский ученый XVI века, родоначальник опытного естествознания. 5. Двухэлектродная электронная лампа, служащая для выпрямления переменного тока. 9. Известный немецкий физик XIX века. 10. Единица давления. 14. Количество движения. 15. Английский физик XIX века, создавший один из гальванических элементов. 17. Американский ученый — основоположник кибернетики. 18. Единица веса. 21. Советский физик, лауреат Нобелевской премии. 22. Русский инженер, усовершенствовавший электросварку. 23. Бесцветная вязкая жидкость. 26. Электрод. 27. Советский физик, лауреат Нобелевской премии. 28. Элементарная частица. 29. Термопластическая масса.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

2

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОБКИ

Найдите форму пробки, которая плотно закроет любое из трех заданных отверстий в планке (пробка пройдет сквозь эти отверстия без зазоров).

